整函数の Hardy 空間

Hardy spaces of entire functions

中井三留 *，　成田淳一郎 **，　瀬川重男 ***

Mitsuru Nakai,　Junichiro Narita,　Shigeo Segawa

Summary

A complex linear subspace X of the complex linear space $A(\mathbb{C})$ of entire functions on the complex plane $\mathbb{C}$ is said to be realizable as a Hardy space of exponent $0 < p < \infty$ if there exists a subregion R of $\mathbb{C}$ such that $X = H^p(R)$, the Hardy space on R of exponent $0 < p < \infty$. Such an X is also referred to as being a Hardy space of entire functions of exponent $0 < p < \infty$. The Hardy space of entire functions of exponent ∞ can also be considered but virtually excluded in the present context of this paper since it is merely reduced to the trivial linear subspace $\mathbb{C} \subset A(\mathbb{C})$ in view of the Liouville theorem. The main theme of this paper is to classify linear subspaces of $A(\mathbb{C})$ into two categories of realizable subspaces X for every exponent $0 < p < \infty$ and of nonrealizable ones for every exponent $0 < p < \infty$. Various results concerning this classification problem are given: for example, it is shown that the set of linear dimensions of realizable subspaces X exhausts the set $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ consisting of the set $\mathbb{N}$ of positive integers and the infinity ∞; it is also shown that if a realizable subspace X is of infinite dimension, then X contains at least one transcendental entire function. The main result of this paper is that if we donote by $\mathcal{P}_\nu$ the class of polynomials of degrees less than $\nu + 1$ with $\nu \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, then $\mathcal{P}_\nu$ is realizalbe for every exponent $0 < p < \infty$ for any $\nu \in \mathbb{N}$, but $\mathcal{P}_\infty$ is nonrealizable for every exponent $0 < p \leqq \infty$. Similar observations as above are made for the orders of entire functions in place of the degrees of entire functions though the study of this part in the case of orders is still largely incomplete.

キーワードとフレーズ： 次数，整函数，ハーディー空間，ハーディー-オールリッツ空間，非極集合，位数，多項式，除去可能集合，超越整函数.

Keywords and Phrases : degree, entire function, Hardy space, Hardy-Orlicz space, nonpolar set, order, polynomial, removable set, transcendental entire function.

献詞： 年来の共同研究の有能かつ重要な同僚であった畏友故多田俊政元本学教授と故原優元名城大学教授の霊に心からの哀惜と尊崇の念をもって謹んで本論文を捧げる.

1. 序論

1.1. Hardy 空間.　本論文の主題は指数 $0 < p \leqq \infty$ の Hardy 空間 $H^p(R)$ である．函数族 $H^p(R)$ の各函数の定義域は一般には Riemann 面 R を取るが，定義だけなら本質的には変わりはないが，本論文では特に断らぬ限り R は平面領域にとる，即ち，複素平面を通常の記号 $\mathbb{C}$ で表すとき，その連結開部分集合である領域 $R \subset \mathbb{C}$ をとる．時折，複素球面 $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (∞ は $\mathbb{C}$ の無限遠点) をとり，その領域 $R \subset \hat{\mathbb{C}}$ も考えるが，矢張り主としては $R \subset \mathbb{C}$ である領域 R が主対象である．領域 $R \subset \mathbb{C}$ 上の正則函数全体を $\boldsymbol{A(R)}$ と記す．特に $A(\mathbb{C})$ の各函数を函数論の伝統的な言葉で**整函数**と呼ぶので $A(\mathbb{C})$ は整函数空間である．$0 < p < \infty$ と $f \in A(R)$ に対して $|f^p| = |f|^p$ は R 上の劣調和函数であるが，これが R 上調和優函数を持つとき，f は R 上の指数 p の **Hardy 函数** と言いその全体を $\boldsymbol{H^p(R)}$ と記し，これを R 上の指数 p の **Hardy 空間** と言う．これには $p = \infty$ も加える，即ち，$f \in A(R)$ に対し $\sup\{|f(z)| : z \in R\} < \infty$ ならば，つまり f が R 上有界ならば，f は R 上の指数 ∞ の Hardy 函数と言って，その全体が R 上の指数 ∞ の Hardy 空間 $H^\infty(R)$

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 30D55; Secondary 30C85, 30D15, 30F20

* 名古屋工業大学名誉教授，元本学客員教授
** 本学数学教室
*** 本学特任教員，本学名誉教授

である．これは Riemann 面 の分類理論ではずっと $AB(R)$ と記されてきたものである．$f \in H^p(R)$ $(0 < p \leqq \infty)$ に対し，参照点 $a \in R$ を固定して，$0 < p < \infty$ なら $|f^p|$ の最小調和優函数を $\widehat{|f^p|}$ と記し

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left(\widehat{|f^p|}(a)\right)^{1/p} & (0 < p < \infty) \\ \sup\{|f(z)| : z \in R\} & (p = \infty) \end{cases} \tag{1.1.1}$$

を f の H^p ノルムと呼ぶ．すると $f_1, f_2 \in H^p(R)$ の間の距離 $d_p(f_1, f_2)$ を

$$d_p(f_1, f_2) = \left(\|f_1 - f_2\|_p\right)^{p\wedge 1} \quad (p \wedge 1 := \min\{p, 1\}) \tag{1.1.2}$$

で与えると，$H^p(R)$ $(0 < p \leqq \infty)$ は線形完備距離空間としての Fréchet 空間 である．特に $1 \leqq p \leqq \infty$ の場合には，$H^p(R)$ は $\|\cdot\|_p$ を真性ノルムとする Banach 空間 である (例えば，[13], [14], [15] 等参照)．

1.2. Hardy 除去可能集合． $\mathbb{C}$ 内の完閉部分集合（即ち，有界閉集合）E に対し，E を含む任意の領域 R（即ち，$E \subset R \subset \mathbb{C}$）をどの様に選ぼうとも

$$H^p(R \backslash E) = H^p(R) \tag{1.2.1}$$

となる，即ち，$R \backslash E$ 上の任意の $f \in H^p(R \backslash E)$ は R まで拡張出来て $f \in H^p(R)$ となる，と言う条件を満たすとき，E は $\boldsymbol{H^p}$**除去可能集合**と言い，その全体の作る族を $\boldsymbol{\mathcal{N}_p}$ と記す．次に，領域 R に対し $H^p(R)$ が退化して $H^p(R) = \mathbb{C}$ となる場合がある．この様な $R \subset \mathbb{C}$ の全体を Riemann 面 の分類理論の記号で $\mathcal{O}_{H^p}$ 又はこれを簡略化して $\boldsymbol{\mathcal{O}_p}$ と記すとき，

$$E \in \mathcal{N}_p \Longleftrightarrow \mathbb{C} \backslash E \in \mathcal{O}_p \quad (0 < p \leqq \infty) \tag{1.2.2}$$

が成立することが分かっている．又 $E \in \mathcal{N}_p$ なら E は完全非連結であることも分かる．今度は $\mathbb{C}$ 内の閉部分集合 E で，任意の完閉集合 K に対し $E \cap K \in \mathcal{N}_p$ となるならば，E は**局所** $\boldsymbol{H^p}$**除去可能集合**と言い，その全体を $\boldsymbol{\mathcal{E}_p}$ と記す．従って $E \in \mathcal{E}_p$ は又 $\mathcal{N}_p$ 集合同様完全非連結集合となるが，これから，$\mathbb{C}$ の Jordan 領域 Ω_j からなる $\mathbb{C}$ の近似 $(\Omega_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ($\mathbb{N}$ は自然数全体) で $E \cap \partial\Omega_j = \emptyset$ $(j \in \mathbb{N})$ となるものがとれることが分かる．このとき $E \cap \Omega_j$ は完閉で $E \cap \Omega_j \in \mathcal{N}_p$ $(j \in \mathbb{N})$ となる．更に $E \cap (\Omega_j \backslash \bar{\Omega}_{j-1})$ は完閉で，$E \cap (\Omega_j \backslash \bar{\Omega}_{j-1}) \in \mathcal{N}_p$ ($j \in \mathbb{N}$; 但し$\Omega_0 = \emptyset$) である．上の様な $\mathbb{C}$ の近似 $(\Omega_j)_{j \in \mathbb{N}}$ を $E \in \mathcal{E}_p$ に関する $\mathbb{C}$ の $\boldsymbol{\mathcal{N}_p}$**近似** と言い

$$E = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j, \quad E_j := E \cap (\Omega_j \backslash \bar{\Omega}_{j-1}) \in \mathcal{N}_p \quad (j \in \mathbb{N}, \Omega_0 = \emptyset) \tag{1.2.3}$$

を $E \in \mathcal{E}_p$ の $\mathbb{C}$ の $\mathcal{N}_p$ 近似 $(\Omega_j)_{j \in \mathbb{N}}$ に関する $\boldsymbol{\mathcal{N}_p}$**分解** と呼び，各 E_j を E の $\boldsymbol{\mathcal{N}_p}$**成分** 又は単に成分と言う．本論文では $E \in \mathcal{E}_p$ の補集合 $\mathbb{C} \backslash E$ 上の Hardy 空間 $H^p(\mathbb{C} \backslash E)$ $(0 < p \leqq \infty)$ の研究を目的とする．最も基本となる所は次の主張である：

命題 1.2.4. 各指数 $\boldsymbol{0 < p \leqq \infty}$ に対し，局所 $\boldsymbol{H^p}$ 除去可能集合 $\boldsymbol{E \in \mathcal{E}_p}$ の補集合 $\boldsymbol{\mathbb{C} \backslash E}$ 上の Hardy 空間 $\boldsymbol{H^p(\mathbb{C} \backslash E)}$ の各函数は整函数に一意に拡張出来ると言う意味で整函数である，即ち，

$$\boldsymbol{H^p(\mathbb{C} \backslash E) \subset A(\mathbb{C}) \quad (E \in \mathcal{E}_p).} \tag{1.2.5}$$

証明：$\mathbb{C}$ の E に関する $\mathcal{N}_p$ 近似 $(\Omega_j)_{j \in \mathbb{N}}$ をとる．任意の $f \in H^p(\mathbb{C} \backslash E)$ は勿論各 $j \in \mathbb{N}$ に対し $f \in H^p(\Omega_j \backslash E) = H^p(\Omega_j \backslash (E \cap \Omega_j))$ で $E \cap \Omega_j$ は Ω_j 内完閉故 $E \cap \Omega_j \in \mathcal{N}_p$ だから $H^p(\Omega_j \backslash (E \cap \Omega_j)) = H^p(\Omega_j) \subset A(\Omega_j)$ である．よって各 $j \in \mathbb{N}$ で $f \in A(\Omega_j)$ 故 $f \in A(\cup_{j \in \mathbb{N}} \Omega_j) = A(\mathbb{C})$ となる． □

Hardy 空間 $H^p(\mathbb{C} \backslash E)$ は H^p ノルムを位相とする Fréchet 空間 としての位相線形空間であり，又整函数空間 $A(\mathbb{C})$ も局所一様収束による位相線形空間である．しかし当面位相構造は忘れ，単に $H^p(\mathbb{C} \backslash E)$ も $A(\mathbb{C})$ も複素線形空間と見たときに $H^p(\mathbb{C} \backslash E)$ は $A(\mathbb{C})$ の線形部分空間であると言って居るのが，(1.2.5) の意味である．この見地に立って自然と浮かんでくる最も素朴な疑問は，$H^p(\mathbb{C} \backslash E)$ で E を $E \in \mathcal{E}_p$ すべてにわたってとるとき $A(\mathbb{C})$ のどの様な線形部分空間になり得るか，例えばその部分空間中最も大きなものは $A(\mathbb{C})$ 自身となりうるか，その部分空間の次元は $\mathbb{N}$ の元を自由に取り得るか，[1] 等々様々である，即ち，次の形にまとめた上記疑問を我々の「整函数の Hardy 空間 $H^p(\mathbb{C} \backslash E)$ $(E \in \mathcal{E}_p)$」研究の指

---

1) どんな $E \in \mathcal{E}_p$ $(0 < p \leqq \infty)$ に対しても $A(\mathbb{C}) = H^p(\mathbb{C} \backslash E)$ となることはないことがわかる．どこかに発表予定で居る．他方，主張：すべての $0 < p < \infty$ に対し $\boldsymbol{\{\dim H^p(\mathbb{C} \backslash E) : E \in \mathcal{E}_p\}} \supset \mathbb{N}$, の正しいことは本論文読了迄には了解される．

導原理とする：

問題 1.2.6. **各指数 $0 < p \leqq \infty$ に対し，$\{H^p(\mathbb{C}\backslash E) : E \in \mathcal{E}_p\}$ は，$A(\mathbb{C})$ のどの様な線形部分空間族であるかを決定せよ．**

この問題は指数 $0 < p \leqq \infty$ に本質的に依存する．更に詳言するなら，$0 < p < \infty$ の場合と $p = \infty$ の場合との間に著しい差異が存在する．事実，$p = \infty$ の場合には次の **Liouville の定理**（の拡張）が成立する：

(1.2.7)
$$H^\infty(\mathbb{C}\backslash E) = \mathbb{C} \quad (E \in \mathcal{E}_\infty).$$

この成立理由を述べる．任意の $f \in H^\infty(\mathbb{C}\backslash E)\,(E \in \mathcal{E}_\infty)$ をとる．或る正数 $0 < M < \infty$ があって $|f(z)| \leqq M\ (z \in \mathbb{C}\backslash E)$ であり，又，命題 1.2.4 により $f \in A(\mathbb{C})$ である．$p = \infty$ としての命題 1.2.4 の上記證明中の $\mathbb{C}$ の $E \in \mathcal{E}_\infty$ に対する $\mathcal{N}_\infty$ 近似 $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ をとると $E \cap \partial\Omega_j = \emptyset$ だから $|f(z)| \leqq M\ (z \in \partial\Omega_j \subset \mathbb{C}\backslash E)$ かつ $f \in A(\mathbb{C}) \subset A(\Omega_j)$ より最大値原理により $|f(z)| \leqq M\ (z \in \overline{\Omega}_j)$ となり $(j \in \mathbb{N})$，最終的には $|f(z)| \leqq M\ (z \in \cup_{j\in\mathbb{N}}\Omega_j = \mathbb{C})$ となる．よって f は有界整函数故，本来の Liouville の定理で $f \in \mathbb{C}$ が結論され (1.2.7) が従う（理由説明終り）．この様に問題 1.2.6 は $p = \infty$ なら自明で意味がない．故に問題 1.2.6 は $0 < p < \infty$ に限定して考えたらよく，以下本論文では，特に断らぬ限り**指数は $0 < p < \infty$ に限定**する．その上で問題 1.2.6 の満足出来る解答からは程遠いが，とにかくこの方向への研究に資することを期待して得られた若干の結果を本論文で報告する．その一つを (1.2.7) の関連で例記してみる．$\mathbb{C}$ 係数の線形空間 X の次元 (dimension) を $\dim X$ と記すとき

(1.2.8)
$$\begin{cases} \{\dim H^p(\mathbb{C}\backslash E) : E \in \mathcal{E}_p\} = \mathbb{N} \cup \{\infty\} & (0 < p < \infty), \\ \{\dim H^\infty(\mathbb{C}\backslash E) : E \in \mathcal{E}_\infty\} = \{1\} & (p = \infty) \end{cases}$$

である．第二式は (1.2.7) を換言したものであるが，第一式は論文の終了迄には自然に分かる．

1.3. 整函数の次数. 各整函数 $f \in A(\mathbb{C})$ に対してその**次数** (degree) と呼ぶ量 $\mathbf{deg}\,f$ が以下の如く定義される．先ず各 $f \in A(\mathbb{C})$ に対して，各 $0 \leqq r < \infty$ 毎に

(1.3.1)
$$M(r) = M(r; f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\} \quad (0 \leqq r < \infty)$$

と置く．最大値の原理で $M(r) = \max\{|f(z)| : |z| \leqq r\}$ 故 $M(r)$ は r の非減少関数であり，更に Hadamard の三円定理，即ち，$\log M(r)$ は $\log r$ の凸函数，であるので，

(1.3.2)
$$\mathbf{deg}\,f := \lim_{r\uparrow\infty} \frac{\log M(r)}{\log r}$$

が定義出来る，即ち，上の右辺の極限が $[0, +\infty]$ 内に確定する，即ち，$0 \leqq \deg f \leqq +\infty$．更に詳しくは，写像 $\deg : A(\mathbb{C}) \to [0, \infty]$ の値域

$$\deg A(\mathbb{C}) = \{\deg f : f \in A(\mathbb{C})\} = \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

であることが分かる．事実，$A(\mathbb{C})$ を $\hat{\mathbb{C}}$ で考えると $\mathbb{C}$ の無限遠点 $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$ は各整函数 $f \in A(\mathbb{C})$ の孤立特異点で，∞ が $f \in A(\mathbb{C})$ の真性特異点 $\Longleftrightarrow \deg f = \infty$; ∞ が $f \in A(\mathbb{C})$ の極 $\Longleftrightarrow \deg f \in \mathbb{N}$; ∞ が $f \in A(\mathbb{C})$ の除去可能特異点 $\Longleftrightarrow f \in \mathbb{C} \Longleftrightarrow \deg f = 0$, である．要するに，$A(\mathbb{C}) = \{$ 超越整函数 $\} \cup \{$ 多項式 $\}$ に於いて，$f \in A(\mathbb{C})$ が超越整函数 $\Longleftrightarrow \deg f = \infty$, $f \in A(\mathbb{C})$ が n 次多項式 $\Longleftrightarrow \deg f = n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ と言うことである．

さて，いつもすぐに頭を掠める疑問，$\{H^p(\mathbb{C}\backslash E) : E \in \mathcal{E}_p\}$ は $A(\mathbb{C})$ のすべての線形部分空間を尽すか否かは，$H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ と $A(\mathbb{C})$ 夫々の位相構造も考慮すれば問題外の設問であろうが，あえて線形代数構造の範囲で眺めてみる．先ず $p = \infty$ の場合には (1.2.7) の示す様に $\{H^\infty(\mathbb{C}\backslash E) : E \in \mathcal{E}_\infty\} = \{\mathbb{C}\}$ であるから，自明な $\mathbb{C}(\subset A(\mathbb{C}))$ 以外の線形部分空間のどれにもなれぬから，この問は完全無欠に否定されるが，事程左様の末に，指数 p は $0 < p < \infty$ の場合に限定した次第である．それでもこの問は否定的であることを見よう．これを次数 $\deg f\ (f \in H^p(\mathbb{C}\backslash E) \subset A(\mathbb{C})\,(E \in \mathcal{E}_p))$ との関連での考察の結果としての次の形での主張として記す：

命題 1.3.3. **整函数の指数 $0 < p < \infty$ の Hardy 空間 $H^p(\mathbb{C}\backslash E)\ (E \in \mathcal{E}_p)$ が無限次元なら，即ち $\dim H^p(\mathbb{C}\backslash E) = \infty$ なら，$H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ は少なく共一つの超越整函数を含む．**

証明[2)]：背理法に依る為 $H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ のどの函数も超越的でないとすると $H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ は多項式からなる $A(\mathbb{C})$ の線形部分空間である．$\{\deg f : f \in H^p(\mathbb{C}\backslash E)\}$ の中の互いに相異なる非負正数を小さなものから大きなものへと並べると，$H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ が無限次元だから，これらは $\mathbb{Z}^+ = \{0\} \cup \mathbb{N}$ 内の無限増加整数列 $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ となる：

$$0 \leqq d_1 < d_2 < \cdots\cdots < d_n < d_{n+1} < \cdots\cdots .$$

各 $n \in \mathbb{N}$ に対し d_n 次多項式 $P_n \in H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ で首位項係数 1 のものを一つずつ取って固定する：

$$P_n(z) = z^{d_n} + \sum_{j=0}^{d_n-1} \alpha_{nj} z^j \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{1.3.4}$$

この様な多項式列 $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を以下に示す様に作り替えた多項式列 $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ を考える：$(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は以下の如く帰納的に定める．先ず $Q_1(z) := P_1(z)$ と置く．次いで $Q_2(z) := P_2(z) - \alpha_{2d_1}Q_1(z)$ とする，つまり $Q_2(z)$ の首位項 z^{d_2} の係数は 1 で，z^{d_1} の係数は 0 である．この様にして $Q_1(z), \cdots, Q_{n-1}(z)$ $(n > 1)$ を定めたとき $Q_n(z)$ を次式で定める：

$$Q_n(z) := P_n(z) - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{nd_i} Q_i(z) \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{1.3.5}$$

この改変を施した結果

$$\begin{cases} Q_n(z) = z^{d_n} + \displaystyle\sum_{j=0}^{d_n-1} \beta_{nj} z^j \\ \beta_{nd_1} = \beta_{nd_2} = \cdots\cdots = \beta_{nd_{n-1}} = 0 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{1.3.6}$$

任意の一点 $a \in \mathbb{C}\backslash E$ を選び固定する．$f \in H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ に対し劣調和函数 $|f|^p$ の最小調和優函数を $\widehat{|f^p|}$ と記すとき

$$\|f\|_p := \left(\widehat{|f^p|}(a)\right)^{1/p}$$

を $H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ 上の f の H^p ノルムと呼んだが，これは $p \geqq 1$ ならば Banach ノルムであるが $0 < p < 1$ のときは三角不等式を満たさなかった．しかしすべての $0 < p < \infty$ に対し

$$\mathopen{|\!|}f\mathclose{|\!|}_p := \|f\|_p^{p\wedge 1} \quad (p \wedge 1 = \min\{p, 1\}) \tag{1.3.7}$$

と置けば，これは Fréchet ノルムで $H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ はこれに依る Fréchet 空間 で二元 $f, g \in H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ の間の $d_p(f, g) := \mathopen{|\!|}f - g\mathclose{|\!|}_p$ を距離とする完備距離空間であった．この定義のもとで，次に正数列 $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を

$$0 < \gamma_n < \left(\frac{1}{2^n \mathopen{|\!|}Q_n\mathclose{|\!|}_p}\right)^{1/p\wedge 1} \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{1.3.8}$$

を満たす様に定め，(1.3.6) の多項式列 $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を使って新たな多項式列 $(R_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ を

$$R_n(z) := \sum_{k=1}^{n} \gamma_k Q_k(z) \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{1.3.9}$$

により与える．すると

$$\begin{aligned} \mathopen{|\!|}R_n - R_{n+m}\mathclose{|\!|}_p &= \left|\!\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} \gamma_k Q_k \right|\!\right|_p \leqq \sum_{k=n+1}^{n+m} \mathopen{|\!|}\gamma_k Q_k\mathclose{|\!|}_p \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+m} |\gamma_k|^{p\wedge 1} \mathopen{|\!|}Q_k\mathclose{|\!|}_p \leqq \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^n} \quad (n, m \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

---

2) 以下で述べる証明は，命題 1.3.3 の證明と言うよりは，むしろ命題 1.3.3 より更に一般である主張：**Y が $H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ $(E \in \mathcal{E}_p)$ の無限次元線形部分空間ならば，Y は超越整函数を含む**，の證明となっている．この注意の要点は次の所にある，即ち，$H^p(\mathbb{C}\backslash E) \subset A(\mathbb{C})$ は常に $A(\mathbb{C})$ の**順序イデアル**である：$f \in H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ ならば，$g \in A(\mathbb{C})$ が $\mathbb{C}$ 上で $|g(z)| = O(|f(z)|)$ $(z \to \infty)$ となっている限り $g \in H^p(\mathbb{C}\backslash E)$．だから $H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ がある真の μ 次多項式 $(\mu \in \mathbb{Z}^+)$ を含めば，すべての ν 次多項式 $(\nu \in \mathbb{Z}^+, \nu \leqq \mu)$ を含む．しかし $Y \subset H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ $(E \in \mathcal{E}_p)$ は必ずしも順序イデアルでないので上記性質を Y が持つとは限らない．

だから $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は Fréchet 空間 $H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ 内の Cauchy 列であり，その完備性によれば，或る $R\in H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ が定まって $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は R へ $\|\cdot\|_p$ 収束する．$\|\cdot\|_p$ 収束は $\mathbb{C}\backslash E$ 上局所一様収束を誘導する．E が $\mathcal{E}_p$ に入るのだから，E の完全非連結性により $\mathbb{C}$ の Jordan 領域 Ω_l による近似列 $(\Omega_l)_{l\in\mathbb{N}}$ で $E\cap\partial\Omega_l=\emptyset$ $(l\in\mathbb{N})$ となるものがとれた．各 $\partial\Omega_l$ 上 $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は R へ一様収束するので，最大値原理により $\overline{\Omega}_l$ 上一様収束で，従って $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は R へ一様収束する．そこで，R_n は d_n 次多項式，R は $\mathbb{C}$ 上正則函数 $R\in A(\mathbb{C})$ なので

$$\begin{cases} R_n(z)=\sum_{i=0}^{d_n} c_{ni}z^i, \\ R(z)=\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \end{cases} \tag{1.3.10}$$

と置くならば，(1.3.6) により Q_k の最高次項が z^{d_k} 故 R_n の定義式 (1.3.9) に見るとおり R_n の d_k 次項は $\gamma_k z^{d_k}$ でそれを (1.3.10) で $c_{nk}z^{d_k}$ と記したのだから

$$c_{nd_1}=\gamma_1,\, c_{nd_2}=\gamma_2,\cdots,\, c_{nd_n}=\gamma_n \quad (n\in\mathbb{N}) \tag{1.3.11}$$

となる．そこで，$\Gamma=\{|z|=1\}$ として，任意の $m\in\mathbb{N}$ を固定するとき (1.3.10) に於いて

$$\begin{aligned} c_{d_m} &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{R(z)}{z^{d_m+1}}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\lim_{n\to\infty}R_n(z)}{z^{d_m+1}}\,dz=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{R_n(z)}{z^{d_m+1}}\,dz \\ &= \lim_{n\to\infty} c_{nd_m}=\lim_{n\to\infty}\gamma_m=\gamma_m>0 \quad (m\in\mathbb{N}) \end{aligned}$$

となるので，$R\in H^p(\mathbb{C}\backslash E)\subset A(\mathbb{C})$ の整級数展開 (1.3.10) の係数列 $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ の内の無限部分列 $(c_{d_1},c_{d_2},\cdots,c_{d_m},\cdots)=(c_{d_j})_{j\in\mathbb{N}}$ のどの項も零でないから，$R\in H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ は超越整函数であると言うことになり，$H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ のどの函数も超越的でないとした背理法の仮定に叛く．□

上記主張，命題 1.3.3 の一つの応用例として，次の事実を指摘する．$0<p<\infty$ として，どんなに $E\in\mathcal{E}_p$ を探しても

$$H^p(\mathbb{C}\backslash E)=\{f\in A(\mathbb{C}):\deg f<\infty\} \tag{1.3.12}$$

となる様な $E\in\mathcal{E}_p$ を見つけることは出来ない．従って $\{H^p(\mathbb{C}\backslash E):E\in\mathcal{E}_p\}$ によって尽くされぬ $A(\mathbb{C})$ の線形部分空間の一例が上の (1.3.12) の右辺の空間 $\{f\in A(\mathbb{C}):\deg f<\infty\}$ (多項式空間) である．(1.3.12) を成立させる $E\in\mathcal{E}_p$ の非存在證明を与える．(1.3.12) となる $E\in\mathcal{E}_p$ が見つかったとする．(1.3.12) の右辺は無限次元故左辺の $H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ も無限次元でないといけない．とすれば命題 1.3.3 により $H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ は超越整函数 f を含む．即ち $\deg f=\infty$ となる f を含む．よって (1.3.12) によりこれがその右辺の空間 $\{f\in A(\mathbb{C}):\deg f<\infty\}$ に含まれることになり明らかな矛盾である (非存在證明終り)．よって，少なくとも次のことが結論出来る：$0<p<\infty$ で $E\in\mathcal{E}_p$ とするとき

$$\text{“}H^p(\mathbb{C}\backslash E)\subset\{f\in A(\mathbb{C}):\deg f<\infty\}\text{”}\Longrightarrow\text{“}\dim H^p(\mathbb{C}\backslash E)<\infty\text{”}. \tag{1.3.13}$$

1.4. 多項式の Hardy 空間. 整函数空間 $A(\mathbb{C})$ の線形部分空間 の中で，分かり易く馴染み深いものの最右翼が多項式全体からなる空間 $\{f\in A(\mathbb{C}):\deg f<\infty\}$ であり，それと Hardy 空間 $H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ $(E\in\mathcal{E}_p)$ の次元との関連の一端に前小節 1.3 で言及した．そこで現れた

$$H^p(\mathbb{C}\backslash E)\subset\{f\in A(\mathbb{C}):\deg f<\infty\} \tag{1.4.1}$$

となる $H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ $(E\in\mathcal{E}_p)$ を一般に**多項式の Hardy 空間**と言えば印象的であろう．すると注意 (1.3.13) は “多項式の Hardy 空間は有限次元である” と言う具合に表現される．この事実に示唆されたら自然に成立が期待されるかもしれぬ次の結果を本論文の**主要定理**の一つとする：

定理 1.4.2. 任意の指数 $0<p<\infty$ を取る．どんな非負整数 $\nu\in\mathbb{Z}^+:=\{0\}\cup\mathbb{N}$ を与えても

$$\boldsymbol{H^p(\mathbb{C}\backslash E)=\{f\in A(\mathbb{C}):\deg f\leqq\nu\}} \tag{1.4.3}$$

となる様な $E\in\mathcal{E}_p$ が存在する，即ち，どんな有限指数 $0<p<\infty$ に対しても，任意の非負整数 ν を与えるごとに適当な局所 H^p 除去可能集合 $E\subset\mathbb{C}$ でその補集合上の Hardy 空間 $H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ が高々 ν 次多項式全体となるものが見つかる．

Riemann 面 R の等角構造と R 上の調和又は解析函数の様々な空間の代数的又は位相代数的構造との関連に視点を置く Riemann 面の分類理論 (例えば [17] 参照) に Hardy 空間の研究を組織的に取り入れた最初のものは Parreau [16] の研究であろう．1969 年発表のモノグラフ [6] で Heins は Riemann 面 R 上の Hardy 空間 $H^p(R)$ $(0 < p \leqq \infty)$ による Riemann 面の分類を論じその分類図式表を完成した．そしてこの理論での Riemann 面 R を平面領域 R に限定した形での同一理論の再構築に手を染め，この目的の完全な達成を目指す研究を問題として提案した．1970 年代初頭この研究は Hejhal [7, 8] により部分的完成 (即ち，$1 \leqq p \leqq \infty$) 迄に大きく進展し，更に同年代後半の $0 < p < 1$ も視野に加えた小林の研究 [10, 11] はこの課題の全面的完成迄非常に遠い道程にあるわけではないことを予感させたが，それにつぐ大体同時期に荷見 [2, 3] により，文字どおりの Heins 提案の完全無欠な解決が与えられた．方法論的には荷見は Parreau や Heins に散見される様に Hardy 空間を Hardy-Orlicz 空間の立場へ精密化して，双曲的除去可能集合の存在定理，及び指定流量の局所除去可能集合の存在定理と言う二つの基本定理を確立し，これに基づいて上記完成を達成した (荷見のモノグラフ [4] も参照)．我々の上記定理 1.4.2 の證明は本質的にはこの荷見の着想，構想に従って行う．先ず上の定理の Hardy-Orlicz 空間版を示しその系として上の定理 1.4.2 を 6 節の小節 6.2 に於いて導く．

次に (1.4.3) の右辺 “高々 ν 次多項式全体” を “多項式全体” に置き換えることが出来るものなら，多項式の Hardy 空間 $H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ $(E \in \mathcal{E}_p)$ で $\dim H^p(\mathbb{C}\backslash E) < \infty$ なものも $\dim H^p(\mathbb{C}\backslash E) = \infty$ なものも存在することになるのであるが，注意 (1.3.13)，即ち多項式の Hardy 空間は有限次元，に抵触するから，その意味で定理 1.4.2 は最良のものである．しかし最低限次のことは言える：

定理 1.4.4．任意の指数 $0 < p < \infty$ を取る．或る $E \in \mathcal{E}_p$ があって

(1.4.5) $$\boldsymbol{H^p(\mathbb{C}\backslash E) \supset \{f \in A(\mathbb{C}) : \deg f < \infty\}}$$

となる，即ち，適当な局所 H^p 除去可能集合 $E \subset \mathbb{C}$ で Hardy 空間 $H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ が多項式全体を含むものがある．こゝで (1.4.5) の包含関係を等号で置き換えることは決して出来ない．

上の最後の部分は注意 (1.3.12) 又は (1.3.13) そのものである．それで (1.4.5) となる $E \in \mathcal{E}_p$ の存在證明は非常に簡単かつ初等的であるが，後程第 6 節の小節 6.3 に於いて与える．

1.5．整函数の位数． 整函数 $f \in A(\mathbb{C})$ の次数 $\deg f$ を定義したときに用いた f の円周 $C(r) = \{|z| = r\}$ $(0 \leqq r < \infty)$ 上の絶対値の上限

$$M(r) = M(r; f) = \sup\{|f(z)| : z \in C(r)\}$$

を再び使って, $f \in A(\mathbb{C})$ に関する 2 量 $\overline{\mathrm{ord}}\, f$ と $\underline{\mathrm{ord}}\, f$ を

(1.5.1) $$\begin{cases} \overline{\mathrm{ord}}\, f = \limsup_{r\to\infty} \dfrac{\log\log M(r)}{\log r} \\ \underline{\mathrm{ord}}\, f = \liminf_{r\to\infty} \dfrac{\log\log M(r)}{\log r} \end{cases}$$

で定め, 前者 $\overline{\mathrm{ord}}\, f$ を f の**上位数** (upper order), 後者 $\underline{\mathrm{ord}}\, f$ を f の**下位数** (lower order) と呼ぶが, 通常は

$$\mathrm{ord}\ f := \overline{\mathrm{ord}}\, f$$

を単に, f の**位数** (order) と呼ぶ.

次にそれら自身も興味深く，また大変有用でもあり，その上，位数の理解にも資すると思われる 2 個の公式を述べ證明を与える．第一のものは標準的知識で, 第二のものはこのままの形では文献上あまり見かけないものである．

第一の公式は位数の計算に拘るものである．整函数 $f \in A(\mathbb{C})$ が整級数

(1.5.2) $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots$$

で与えられているとする．右辺の整級数は $f \in A(\mathbb{C})$ である為の必要十分条件として収束半径が ∞ なので Cauchy-Hadamard の公式により

(1.5.3) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} = 0$$

である．この時 **Lindelöf-Pringsheim** の公式

(1.5.4)
$$\mathbf{ord}\, f = \overline{\mathbf{ord}}\, f = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log n^n}{\log\left|\dfrac{1}{c_n}\right|}$$

が成り立つ．ここで規則 $1/{+0} = +\infty$, $1/{+\infty} = +0$, $|1/0| = \infty$, $1/\infty = 0$ 等に従うものとする．

公式 (1.5.4) の證明： $\rho_1 := \limsup_{r\to\infty} \log\log M(r)/\log r$, $(M(r) = M(r; f))$ と置き，同じ様に $\rho_2 := \limsup_{n\to\infty} \log n^n / \log|1/c_n|$ と置いて， $\rho_1 = \rho_2$ を示せばよい．これを $\rho_1 \geqq \rho_2$ 及び $\rho_1 \leqq \rho_2$ の 2 段階に分けて示す．$f \equiv c \in \mathbb{C}$ なら元々 $\rho_1 = \rho_2 = 0$ だから，$f \in A(\mathbb{C})\backslash\mathbb{C}$ と仮定してよい．だから常に $M(r) \nearrow \infty$ $(r \nearrow \infty)$ である．

第 1 段： $\rho_1 \geqq \rho_2$ の證明： $\rho_1 = \infty$ なら自明に $\rho_1 = \infty \geqq \rho_2$ なので，$\rho_1 < \infty$ と仮定してよい．任意に正数 $\varepsilon > 0$ を固定する．十分大きい $r_0 > 0$ が定まり

$$\frac{\log\log M(r)}{\log r} \leqq \rho_1 + \varepsilon \quad (r \geqq r_0)$$

なので，$M(r) \leqq e^{r^{\rho_1+\varepsilon}}$ $(r \geqq r_0)$ となる．任意の $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ に対し，Cauchy の係数評価によれば

$$|c_n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C(r)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz\right| \leqq \frac{M(r)}{r^n} \leqq \frac{e^{r^{\rho_1+\varepsilon}}}{r^n} \quad (r \geqq r_0)$$

となる．$\varphi_n(r) := e^{r^{\rho_1+\varepsilon}}/r^n$ と置くと

$$|c_n| \leqq \varphi_n(r) \quad (r \geqq r_0)$$

である．$\varphi_n(r)$ の変化表を作ってみる：

r	0	$\cdots$	$\left(\dfrac{n}{\rho_1+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\rho_1+\varepsilon}}$	$\cdots$	∞
$\varphi_n'(r)$		$-$	0	$+$	
$\varphi_n(r)$	∞	$\searrow$	$\left(\dfrac{e(\rho_1+\varepsilon)}{n}\right)^{\frac{n}{\rho_1+\varepsilon}}$	$\nearrow$	∞

十分大きな $n_0 \in \mathbb{N}$ をとれば，$(n/(\rho_1+\varepsilon))^{1/(\rho_1+\varepsilon)} \geqq r_0$ $(n \geqq n_0)$ となるので結局の所

$$|c_n| \leqq \left(\frac{e(\rho_1+\varepsilon)}{n}\right)^{\frac{n}{\rho_1+\varepsilon}} \quad (n \geqq n_0)$$

となる．これを書き換えて

$$\rho_1 + \varepsilon \geqq \frac{\log n^n}{\log\left|\dfrac{1}{c_n}\right|} - \frac{\log e(\rho_1+\varepsilon)}{\log\dfrac{1}{|c_n|^{1/n}}} \quad (n \geqq n_0)$$

の形にしておいた上で $n \nearrow \infty$ とすると，右辺第 2 項は (1.5.3) によれば 0 となるから，$\rho_1 + \varepsilon \geqq \rho_2$ となり，$\varepsilon > 0$ の任意性より $\rho_1 \geqq \rho_2$ である．

第 2 段: $\rho_1 \leqq \rho_2$ の證明： $\rho_2 = \infty$ なら自明に $\rho_1 \leqq \infty = \rho_2$ なので，$\rho_2 < \infty$ と仮定してよい．任意に $\varepsilon > 0$ を固定する．或る $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ が定まって

$$\rho_2 + \varepsilon > \rho_2 + \frac{\varepsilon}{2} > \frac{\log n^n}{\log\left|\dfrac{1}{c_n}\right|} \quad (n \geqq n_\varepsilon)$$

となる．(1.5.3) により，或る $n_\varepsilon \leqq n_0 \in \mathbb{N}$ が決まって

$$\left|\frac{n\log e(\rho_2+\varepsilon)}{\log\left|\dfrac{1}{c_n}\right|}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n \geqq n_0 \geqq n_\varepsilon)$$

と出来る．よってとにかく

$$\rho_2+\varepsilon > \frac{\log n^n}{\log\left|\frac{1}{c_n}\right|} - \frac{n\log e(\rho_2+\varepsilon)}{\log\left|\frac{1}{c_n}\right|} \quad (n \geqq n_0)$$

となる．これを c_n について解くと

$$|c_n| < \left(\frac{e(\rho_2+\varepsilon)}{n}\right)^{\frac{n}{\rho_2+\varepsilon}} \quad (n \geqq n_0)$$

である．従ってすべての $r \geqq 0$ について

$$|c_n|r^n < \left(\left(\frac{e(\rho_2+\varepsilon)}{n}\right)^{\frac{1}{\rho_2+\varepsilon}} r\right)^n \quad (n \geqq n_0) \tag{1.5.5}$$

となる．ここで

$$\left(\frac{e(\rho_2+\varepsilon)}{n}\right)^{\frac{1}{\rho_2+\varepsilon}} r \leqq \frac{1}{2}$$

を n について解くと

$$n \geqq (\rho_2+\varepsilon)e(2r)^{\rho_2+\varepsilon}$$

である．そこで $n(r) \in \mathbb{N}$ を

$$n(r) := \left[(\rho_2+\varepsilon)e(2r)^{\rho_2+\varepsilon}\right] \quad ([\ \ ] \text{ は Gauss 記号}) \tag{1.5.6}$$

と定める．或る $r_0 > 0$ を十分大きく定めると $n(r) > n_0$ $(r \geqq r_0)$ となる．すると, $r \geqq r_0$ のとき

$$|c_n|r^n \leqq \frac{1}{2^n} \quad (n \geqq n(r))$$

となる．さて $M(r) = M(r; f)$ について, $r \geqq r_0$ に対して

$$\begin{aligned} M(r) &\leqq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|r^n = \sum_{n=0}^{n(r)-1} |c_n|r^n + \sum_{n=n(r)}^{\infty} |c_n|r^n \\ &\leqq \sum_{n=0}^{n(r)-1} |c_n|r^n + \sum_{n=n(r)}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{n(r)-1} |c_n|r^n + \frac{1}{2^{n(r)-1}} \end{aligned} \tag{1.5.7}$$

となる．最後に $\sup\{|c_n|r^n : n \in \{0\}\cup\mathbb{N}\}$ を或る $c(r)$ により上から評価することを試みる．(1.5.5) の右辺を n の函数と見て $\varphi_r(n)$ とする：

$$\varphi_r(n) := \left(\frac{e(\rho_2+\varepsilon)r^{\rho_2+\varepsilon}}{n}\right)^{\frac{n}{\rho_2+\varepsilon}},$$

そして $\kappa(r) := \sum_{n=0}^{n_0} |c_n|r^n$, $c(r) > \kappa(r) + \sup_{n\in[0,\infty)} \varphi_r(n)$ とすれば $|c_n|r^n \leqq c(r)$ $(n \in \{0\}\cup\mathbb{N})$ となるであろう．そこで $\varphi_r(n)$ の n を連続変数化してその変化表を作る：

n	0	$\cdots$	$(\rho_2+\varepsilon)r^{\rho_2+\varepsilon}$	$\cdots$	∞
φ_r'		$+$	0	$-$	
φ_r		$\nearrow$	$e^{r^{\rho_2+\varepsilon}}$	$\searrow$	

以上により, $\kappa(r)/e^{r^{\rho_2+\varepsilon}} \to 0$ $(r \to \infty)$ 故,

$$c(r) = 2e^{r^{\rho_2+\varepsilon}} \tag{1.5.8}$$

とすれば, 十分大きな r 達に対して

$$|c_n|r^n \leqq c(r) = 2e^{r^{\rho_2+\varepsilon}} \quad (n \in \{0\} \cup \mathbb{N})$$

となる. よって (1.5.7) より, (1.5.6) と (1.5.8) を使って

$$M(r) \leqq c(r)n(r) + \frac{1}{2^{n(r)-1}} \leqq (\rho_2+\varepsilon)e(2r)^{\rho_2+\varepsilon}2e^{r^{\rho_2+\varepsilon}} + \frac{1}{2^{n(r)-1}}$$

であるから

$$\log M(r) = \log^+ M(r) \leqq \log^+(\rho_2+\varepsilon)e + (\rho_2+\varepsilon)\log^+(2r) + r^{\rho_2+\varepsilon} + \log 4$$

となり, さらに十分 r が大きければ

$$\log\log M(r) \leqq \mathcal{O}(1) + (\rho_2+\varepsilon)\log r$$

即ち

$$\frac{\log\log M(r)}{\log r} \leqq \rho_2 + \varepsilon + \frac{\mathcal{O}(1)}{\log r}$$

となるので, $r \nearrow \infty$ として $\rho_1 \leqq \rho_2 + \varepsilon$ から $\varepsilon > 0$ の任意性より $\rho_1 \leqq \rho_2$ となる. □[3)]

第 2 の公式は, 位数と次数の関係に拘るものである. 即ち, 次の公式が成り立つ：すべての整函数 $f \in A(\mathbb{C})$ 対して

(1.5.9) $$\mathbf{ord}\, e^f = \mathbf{deg}\, f$$

となる. つまり, どの様に整函数 $f \in A(\mathbb{C})$ を取ろうとも, f が多項式でない限り, e^f は位数無限大である.

公式 (1.5.9) の證明： $f \in \mathbb{C}$ なら $e^f \in \mathbb{C}$ なので $\mathrm{ord}\, e^f = 0$ かつ $\deg f = 0$ だから (1.5.9) は $0 = 0$ の意味で成立自明ゆえ $f \in A(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{C}$, 従って $e^f \in A(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{C}$ として (1.5.9) を示せばよい. Liouville の定理で, $f \in A(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{C}$ も $e^f \in A(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{C}$ も $\mathbb{C}$ 上非有界だから, 常に $M(r;f) \nearrow \infty$ $(r \nearrow \infty)$ であり $M(r;e^f) \nearrow \infty$ $(r \nearrow \infty)$ であることを念頭に置いておく. その上で次の二つの不等式

(1.5.10) $$\mathrm{ord}\, e^f \leqq \deg f,$$

(1.5.11) $$\mathrm{ord}\, e^f \geqq \deg f$$

を考える. すると " (1.5.10) と (1.5.11) の成立 " $\Longleftrightarrow$ " (1.5.9) の成立 ", であるので, (1.5.9) の證明を (1.5.10) の證明と (1.5.11) の證明の 2 段階に分けて行う.

第 1 段： (1.5.10) の證明： $|e^f| \leqq e^{|f|}$ だから, $M(r;e^f) \leqq e^{M(r;f)}$ である. 故に

$$\log\log\, M(r;e^f) \leqq \log\log\, e^{M(r;f)} = \log\, M(r;f)$$

であるから

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log\, M(r;e^f)}{\log r} \leqq \lim_{r\to\infty} \frac{\log\, M(r;f)}{\log r}$$

である. 上不等式の左辺は定義 (1.5.1) より $\mathrm{ord}\, e^f$ であり, 右辺は (1.3.2) により $\deg f$ であるから (1.5.10) が導かれた.

第 2 段： (1.5.11) の證明： 次数 deg と位数 ord の定義そのものから容易に分かる様に, 任意の $f \in A(\mathbb{C})$ と任意の $c \in \mathbb{C}$ 対し

$$\deg(f-c) = \deg\, f, \quad \mathrm{ord}\, e^{f-c} = \mathrm{ord}\, e^f$$

---

3) $\overline{\mathrm{ord}}$ に関する Lindelöf-Pringsheim の公式 (1.5.4) に対して, $\underline{\mathrm{ord}}$ に関しては

Shah の不等式： $\underline{\mathbf{ord}}\, f \geqq \liminf_{n\to\infty} \dfrac{\log n^n}{\log|1/c_n|}$

の成立が識られている ([18]; [9] も参照). この不等式での不等号が等号となることもならないこともある. 例えば, $f(z) = e^z$ なら等号成立, $f(z) = \cos z$ なら等号不成立で真の不等号となる.

となる．これを特に $c = f(0)$ の場合で適用した $\deg(f - f(0)) = \deg f$, $\mathrm{ord}\ e^{f-f(0)} = \mathrm{ord}\ e^f$ によれば, (1.5.11) を証明するのに, 必要なら f を $f - f(0)$ で置き換えてもよいから, 本第 2 段においては対象の $f \in A(\mathbb{C})$ は条件

$$f(0) = 0 \tag{1.5.12}$$

を満たすものと仮定してよい．その上で $\mathrm{ord}\ e^f = \infty$ ならば, (1.5.11) は自明な関係, 即ち, $\mathrm{ord}\ e^f = \infty \geqq \deg f$, であるので, 結局 (1.5.11) を示すのに, $\mathrm{ord}\ e^f < \infty$ と仮定してよい．そこで若し $\mathrm{ord}\ e^f < \sigma < \infty$ なら $\deg f \leqq \sigma$ となることが示せたなら

$$\deg f \leqq \inf\{\sigma : \mathrm{ord}\ e^f < \sigma < \infty\} = \mathrm{ord}\ e^f$$

であるから, (1.5.11) が示せたことになる．故に $\mathrm{ord}\ e^f < \sigma < \infty$ となる任意の正数 $\sigma > 0$ をとるとき, $\deg f \leqq \sigma$ となることを言う．$\mathrm{ord}\ e^f$ について

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M(2r; e^f)}{\log r} = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M(2r; e^f)}{\log 2r} = \mathrm{ord}\ e^f < \sigma$$

であるから, 或る正数 $r_0 > 0$ があって

$$\log\log M(2r; e^f) < \sigma \log r = \log r^\sigma \qquad (r \geqq r_0)$$

となるから

$$M(2r; e^f) < e^{r^\sigma} \qquad (r \geqq r_0)$$

となる．ここで暫時 $r \geqq r_0$ となる任意の $r \in \mathbb{R}$ を固定し, 更に

$$K := r^\sigma > 0$$

と記すことにすると, 閉円板 $\{|z| \leqq 2r\}$ 上最大値原理により

$$e^{\mathrm{Re}\, f(z)} = \left|e^{f(z)}\right| \leqq M(2r; e^f) < e^{r^\sigma} = e^K \quad (|z| \leqq 2r)$$

となるから

$$\mathrm{Re}\ f(z) \leqq K \qquad (|z| \leqq 2r) \tag{1.5.13}$$

となる．従って $\{|z| \leqq 2r\}$ に於いて

$$|f(z)| \leqq |2K - f(z)| \qquad (|z| \leqq 2r) \tag{1.5.14}$$

を満たす (下図 1 参照).

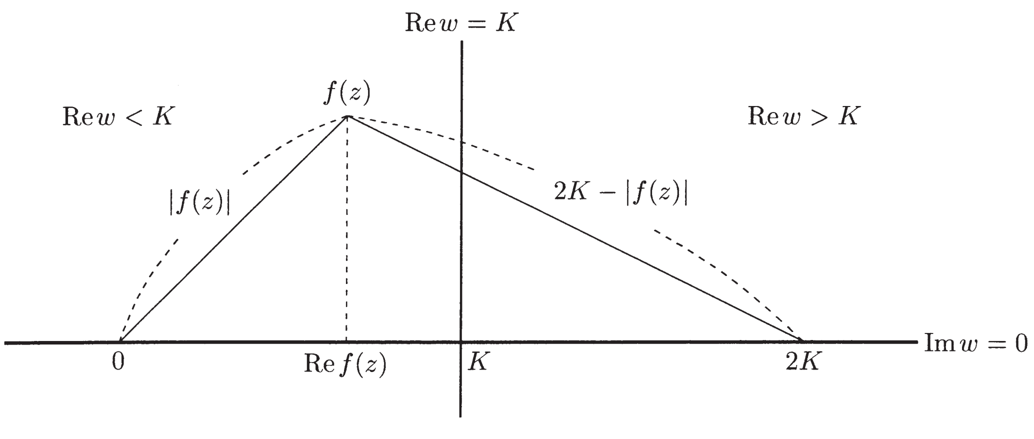

図 1

そこで $\{|z| \leqq 2r\}$ 上の正則函数

$$g(z) = \frac{f(z)}{2K - f(z)} \qquad (|z| \leqq 2r) \tag{1.5.15}$$

を考える. 仮定 (1.5.12) を置いたから $g(0) = 0$ である. (1.5.14) により $|g(z)| < 1$ $(|z| < 2r)$ であるから, Schwarz の補題により

$$|g(z)| < \frac{1}{2r}|z| \quad (|z| < 2r) \tag{1.5.16}$$

となる. (1.5.15) を $f(z)$ について解き $g(z)$ で表すと

$$f(z) = 2K\frac{g(z)}{1+g(z)} \qquad (|z| < 2r)$$

となるから

$$|f(z)| = \left|2K\frac{g(z)}{1+g(z)}\right| = 2K\frac{|g(z)|}{|1+g(z)|} \leqq 2K\frac{|g(z)|}{1-|g(z)|}$$

である. 上の最右辺は $|g(z)|$ の増加函数故, (1.5.16) により

$$|f(z)| \leqq 2K\frac{|z|/(2r)}{1-|z|/(2r)} \quad (|z| < 2r)$$

となる. 特に $|z| = r$, 即ち, $z = re^{i\theta}$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ と置くと

$$|f(re^{i\theta})| \leqq 2K\frac{1/2}{1-1/2} = 2K = 2r^\sigma \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

だから

$$M(r;f) = \sup_{0\leqq\theta\leqq 2\pi} |f(re^{i\theta})| \leqq 2r^\sigma$$

である. 両辺の対数をとり, その結果の両辺を $\log r$ で割ると

$$\frac{\log M(r;f)}{\log r} \leqq \sigma + \frac{2}{\log r}$$

となる. r は $r \geqq r_0$ を満たす任意の正数であったので, 上の両辺で $r \nearrow \infty$ とすることが許される故

$$\deg f = \lim_{r\to\infty}\frac{\log M(r;f)}{\log r} \leqq \sigma + \lim_{r\to\infty}\frac{2}{\log r} = \sigma,$$

即ち, $\deg f \leqq \sigma$ が $\mathrm{ord}\ e^f < \sigma$ より導かれることが示され, (1.5.11) が出る. □

次数にしろ位数にしろいずれも基本整函数 z の増大度 $M(r;z) = r$ $(r > 0)$ に較べて一般の整関数 $f \in A(\mathbb{C})$ の増大度 $M(r;f)$ が, いかばかりかを問うものである. 例えば調和性の加味等様々な理由から $M(r;z)$ と $M(r;f)$ の直接の比較より夫々の対数尺度で見た方が扱い易い所であり, こうして見たものが次数 $\deg f$ であり, 更に大局的詳細に見る為に前者は対数尺度, 後者は反復対数尺度で見たものが位数 $\mathrm{ord}\ f$ である. さてまず第一に次数はどんな数かと言えば

$$\deg A(\mathbb{C}) := \{\deg f : f \in A(\mathbb{C})\} = \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\} \tag{1.5.17}$$

で, 大雑把に言えば, 次数は広い意味の非負値整数の全体である. 同様に, 位数はどんな数であるか, 即ち,

$$\mathrm{ord}\ A(\mathbb{C}) := \{\mathrm{ord}\ f : f \in A(\mathbb{C})\}$$

は何であるか? $A(\mathbb{C})$ の部分集合 $e^{A(\mathbb{C})} := \{e^f : f \in A(\mathbb{C})\} \subset A(\mathbb{C})$ についてだけでも, 公式 (1.5.9) によれば $\mathrm{ord}\ e^{A(\mathbb{C})} = \deg A(\mathbb{C}) = \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 故

$$\mathrm{ord}\ A(\mathbb{C}) \supset \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

である. 事の成り立ちから考えても, 上の $\mathbb{N}$ の間は埋まるべきものと期待されるが, 事実

$$\text{ord } A(\mathbb{C}) = [0, \infty] = \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\} \tag{1.5.18}$$

が成り立つ, 即ち, 上同様大雑把な表現ながら, 位数は広い意味の非負実数の全体である. しかも, これが ((1.5.18) が), $A(\mathbb{C})$ 全部でなくその超越整函数全体に $A(\mathbb{C})$ を制限しても (1.5.18) が成り立つのである. 公式 (1.5.4) の応用として, (1.5.18) を例示する所求の 3 種の超越整函数 $E_\xi \in A(\mathbb{C})$ $(\xi \in [0, \infty])$ を下に列記する：

$$E_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n^n)^{\log|\log n|}} z^n \qquad (\text{即ち } E_\xi \text{ の } \xi = 0 \text{ の場合}); \tag{1.5.19}$$

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n^n)^{1/\alpha}} z^n \qquad (\text{即ち } E_\xi \text{ の } \xi = \alpha \in (0, \infty) \text{ の場合}); \tag{1.5.20}$$

$$E_\infty(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n^n)^{1/\log|\log n|}} z^n \qquad (\text{即ち } E_\xi \text{ の } \xi = \infty \text{ の場合}), \tag{1.5.21}$$

但し $0^0 = 1$ と規約する[4] ； 又 $\log 0 = -\infty$, $\log \infty = \infty$ ； 他に $1^\infty = 1$ 等とする.

例 1.5.22. 各 $\xi \in [0, \infty]$ に対し $E_\xi \in A(\mathbb{C})$ であり

$$\textbf{ord } E_\xi = \xi. \tag{1.5.23}$$

証明： $\xi = 0$ の場合： $E_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ とすると十分の大きい $n \in \mathbb{N}$ に対して $c_n = 1/(n^n)^{\log\log n}$ だから

$$\log \frac{1}{|c_n|^{1/n}} = \log n^{\log\log n} = (\log\log n)\log n \to \infty \quad (n \to \infty),$$

即ち, Cauchy-Hadamard 条件 $|c_n|^{1/n} \to 0$ $(n \to \infty)$ を満たすので, $E_0 \in A(\mathbb{C})$ である. 公式 (1.5.4) により

$$\text{ord } E_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n^n}{\log|1/c_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n^n}{(\log\log n)\log n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log\log n} = 0.$$

$\xi = \infty$ の場合： $E_\infty(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ とすると十分の大きい $n \in \mathbb{N}$ に対して $c_n = 1/(n^n)^{1/\log\log n}$ だから

$$\log \frac{1}{|c_n|^{1/n}} = \log n^{1/\log\log n} = \frac{\log n}{\log\log n} \to \infty \quad (n \to \infty),$$

即ち, Cauchy-Hadamard 条件 $|c_n|^{1/n} \to 0$ $(n \to \infty)$ を満たすので, $E_\infty \in A(\mathbb{C})$ である. 公式 (1.5.4) により

$$\text{ord } E_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n^n}{\log|1/c_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n^n}{(\log n^n)/\log\log n} = \lim_{n\to\infty} \log\log n = \infty.$$

$\xi = \alpha \in (0, \infty)$ の場合： $E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ とすると十分の大きい $n \in \mathbb{N}$ に対して $c_n = 1/(n^n)^{1/\alpha}$ だから

$$\log \frac{1}{|c_n|^{1/n}} = \log n^{1/\alpha} = \frac{1}{\alpha}\log n \to \infty \quad (n \to \infty),$$

即ち, Cauchy-Hadamard 条件 $|c_n|^{1/n} \to 0$ $(n \to \infty)$ を満たすので, $E_\alpha \in A(\mathbb{C})$ である. 公式 (1.5.4) により

$$\text{ord } E_\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n^n}{\log|1/c_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n^n}{\log(n^n)^{1/\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n^n}{(1/\alpha)\log n^n} = \alpha. \qquad \square$$

$f \in A(\mathbb{C})$ が多項式である, 即ち, $\deg f < \infty$ であるとする. $\deg f < \infty$ ならば $\deg f \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ なので $\deg f = n$ であるとすると

$$f(z) = \sum_{j=0}^{n} c_j z^j = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n \qquad (c_n \neq 0)$$

である. $|z| = r \nearrow \infty$ に対し, 順次

4) $\lim_{x\downarrow 0} x^x = 1$ であるので, この規約の正当性は十分に担保される.

$$M(r;f) = |c_n| r^n \left(1 + \mathcal{O}(1/r)\right),$$

$$\log M(r;f) = \log r^n + \log(|c_n| + \mathcal{O}(1/r))$$

$$= (\log r^n)\left(1 + \frac{\log(|c_n| + \mathcal{O}(1/r))}{\log r^n}\right) = (\log r^n)(1 + \mathcal{O}(1/\log r)),$$

$$\log\log M(r;f) = (\log\log r + \log n) + \log(1 + \mathcal{O}(1/\log r))$$

であるから

$$\mathrm{ord}\ f = \lim_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r;f)}{\log r} = \lim_{r\to\infty} \frac{\log\log r}{\log r} + \lim_{r\to\infty} \frac{\log n + \log(1+\mathcal{O}(1/\log r))}{\log r} = 0$$

となる．即ち

$$\deg f < \infty \implies \mathrm{ord}\ f = 0 \tag{1.5.24}$$

である．これは $f \in A(\mathbb{C})$ に対し, $\mathrm{ord}\ f = 0$ が f が非超越的であっても (即ち, (1.5.24)), 又超越的であっても (即ち, (1.5.23) の $E_0 : \mathrm{ord}\ E_0 = 0$) 起り得る事を示して居る．$f$ が超越的である時以外は $\mathrm{ord}\ f = \infty$ が起り得ない事とは好対照である．$\mathrm{ord}\ f \in (0,\infty)$ は $\mathrm{ord}\ f = \infty$ と事情は変らない．

1.6. 有限位数整函数の Hardy 空間. 整函数 $f \in A(\mathbb{C})$ の整級数表示 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ の各項の係数 c_n が実数で非負 $c_n \geqq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ のとき，f は**正係数の整函数**であると言うことにする．そのとき各 $0 \leqq r < \infty$ に対して

$$M(r;f) = f(r) \geqq 0$$

となる．任意の整函数 $f \in A(\mathbb{C})$ に対し，その整級数表示が $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ のとき新たな整級数表示

$$f_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|\, z^n$$

により定めた f_+ は又整函数 $f_+ \in A(\mathbb{C})$ となり，f の正係数化と呼ぶことにすれば，公式 (1.5.4) によれば明らかな様に

$$\mathrm{ord}\, f_+ = \mathrm{ord}\, f$$

となる．正係数整函数の概念を次の主張で利用する：

命題 1.6.1. 任意の $0 < p < \infty$ と任意の $0 < \rho \leqq \infty$ に対し，整函数の Hardy 空間 $H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ $(E \in \mathcal{E}_p)$ が $A(\mathbb{C})$ の 線形部分空間 $\{f \in A(\mathbb{C}) : \mathrm{ord}\, f < \rho\}$ を含むならば，$H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ は少なくとも一つの位数が ρ である正係数の整函数を含む.

證明： ρ が $0 < \rho < \infty$ の場合と，$\rho = \infty$ の場合の二つに分けて，夫々の場合で別々に示す.

第 1 段： $0 < \rho < \infty$ の場合．数列 $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を

$$0 < \rho_1 < \rho_2 < \cdots < \rho_n < \rho_{n+1} < \cdots < \rho, \quad \lim_{n\to\infty} \rho_n = \rho$$

となる様に選んで固定する．各 ρ_n $(n \in \mathbb{N})$ と ρ に対して

$$f_n(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j^j)^{1/\rho_n}} z^j \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j^j)^{1/\rho}} z^j \tag{1.6.2}$$

と置くならば，f_n $(n \in \mathbb{N})$ も f も正係数の整函数であり，例 1.5.22 によれば

$$\mathrm{ord}\, f_n = \rho_n \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad \mathrm{ord}\, f = \rho \tag{1.6.3}$$

であり，しかも各 $0 \leqq r < \infty$ に対し

$$0 < f_1(r) < f_2(r) < \cdots < f_n(r) < f_{n+1}(r) < \cdots < f(r) \tag{1.6.4}$$

となる．$H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ の Fréchet ノルム $|\!|\cdot|\!|_p = \|\cdot\|_p^{p\wedge 1}$ ((1.3.7) 参照) を使って

$$\gamma_n := \left(\frac{1}{2^n\left(|\!|f_n|\!|_p+1\right)}\right)^{1/p\wedge 1} \quad (n\in\mathbb{N}) \tag{1.6.5}$$

により定めた正数列 $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を使って函数列 $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を

$$F_n(z) := \sum_{k=1}^{n}\gamma_k f_k(z) \quad (n\in\mathbb{N}) \tag{1.6.6}$$

と定める．(1.6.3) により又 $\operatorname{ord} F_n = \rho_n$ なので $F_n \in H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ $(n\in\mathbb{N})$ となり

$$|\!|F_n - F_{n+m}|\!|_p \leqq \sum_{k=n+1}^{n+m}|\!|\gamma_k f_k|\!|_p = \sum_{k=n+1}^{n+m}\frac{|\!|f_k|\!|_p}{2^k\left(|\!|f_k|\!|_p+1\right)} < \frac{1}{2^n} \quad (n,m\in\mathbb{N})$$

より，$(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ 内の Cauchy 列だから，或 $F\in H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ が定まって

$$\lim_{n\to\infty} F_n = F \quad (H^p(\mathbb{C}\backslash E)\ \text{内強収束})$$

なので，$(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は F に $\mathbb{C}\backslash E$ 上，従って $\mathbb{C}$ 上，局所一様収束するから

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k f_k(z), \quad F\in H^p(\mathbb{C}\backslash E) \tag{1.6.7}$$

となる．F は正係数整函数故 (1.6.4) により，各 $m\in\mathbb{N}$ に対し，$0\leqq r<\infty$ につき

$$\gamma_m f_m(r) \leqq F(r) \leqq \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k f(r) \leqq f(r)$$

である．よって $\gamma_m M(r;f_m) \leqq M(r;F) \leqq M(r;f)$ により $\operatorname{ord} f_m \leqq \operatorname{ord} F \leqq \operatorname{ord} f$, 即ち

$$\rho_m \leqq \operatorname{ord} F \leqq \rho \quad (m\in\mathbb{N})$$

となり $\operatorname{ord} F = \rho$ が結論され，$0<\rho<\infty$ の場合の證明は終わる．

第２段： $\rho=\infty$ の場合．今度は数列 $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を

$$0<\rho_1<\rho_2<\cdots<\rho_n<\rho_{n+1}<\cdots, \quad \lim_{n\to\infty}\rho_n=\infty$$

で定め，函数列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を，f は無い (1.6.2) で定めると，f の無い (1.6.3) と (1.6.4) が成り立ち，正数列 $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を (1.6.5) で定め，それにより函数列 $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を (1.6.6) で定めると (1.6.7) となる $F\in H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ が定まる所迄第１段と全く同様に進行する．そして最後の所で $0<r<\infty$ に対し $\gamma_m f_m(r)\leqq F(r)$ $(m\in\mathbb{N})$ は第１段の所論の一部分に過ぎず，これから $\rho_m\leqq \operatorname{ord} F$ $(m\in\mathbb{N})$ となり，$m\nearrow\infty$ とすれば $\rho_m\nearrow\infty$ となり，$\operatorname{ord} F=\infty$, $F\in H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ が出る． □

$A(\mathbb{C})$ の線形部分空間 $X\subset A(\mathbb{C})$ を与えるとき，或る $0<p\leqq\infty$ に対し，$X=H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ $(E\in\mathcal{E}_p)$ となる Hardy 空間 $H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ が見つかるとき，X は**整函数の Hardy 空間として実現可能**, どんな $0<p<\infty$ に対しても $X=H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ となる $E\in\mathcal{E}_p$ を見つけることが出来ないとき，X は**整函数の Hardy 空間として実現不能**と言うことにする．本論文の主題は，整函数の Hardy 空間として実現可能な $A(\mathbb{C})$ の線形部分空間の決定，或いは同じことの裏返しである，実現不能な $A(\mathbb{C})$ の線形部分空間の決定である．これに関して，小節 1.4 で

$$\{f\in A(\mathbb{C}) : \deg f<\infty\}\subset A(\mathbb{C})$$

は実現不能なことを見たが，その対応命題として，上の deg を ord で置き換えたものが命題 1.6.1 からわかる：

系 1.6.8. $\{f\in A(\mathbb{C}) : \operatorname{ord} f<\infty\}\subset A(\mathbb{C})$ **は整函数の Hardy 空間として実現不能である**.

同じ命題 1.6.1 からは又次の主張も出る：

系 1.6.9. **$0 < \rho < \infty$ とするとき，$\{f \in A(\mathbb{C}) : \operatorname{ord} f < \rho\} \subset A(\mathbb{C})$ は整函数の Hardy 空間として実現不能である.**

第 1 の系では ord と deg を入れかえても対応主張は不変であったが，本論文の主要定理である定理 1.4.2 によれば，第 2 の系では ord を deg としたものは結論が変わる．即ち，$\{f \in A(\mathbb{C}) : \operatorname{ord} f < \rho\}$ は実現不能であるが，$\{f \in A(\mathbb{C}) : \deg f < \rho\}$ はすべての指数 $0 < p < \infty$ に対して整函数の Hardy 空間 $H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ $(E \in \mathcal{E}_p)$ として実現可能である．何故ならば，$0 < p < \infty$ のとき

$$\{f \in A(\mathbb{C}) : \deg f < \rho\} = \begin{cases} \{f \in A(\mathbb{C}) : \deg f \leqq [\rho]\} & (\rho \notin \mathbb{N}), \\ \{f \in A(\mathbb{C}) : \deg f \leqq \rho - 1\} & (\rho \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

だからである，但し，$[\rho]$ は ρ の整数部分を示す Gauss の記号である．

次の結果は，我々の本論文の主要定理 1.4.2 の deg を ord で置き換えたものの成否を解明する研究に幾分でも資するものと考えて，本論文での副次的な主要定理に加える：

定理 1.6.10. **任意の指数 $0 < p < \infty$ とどの様な実数 $0 < \alpha < \infty$ に対しても次の包含関係を満たす様な或る $E \in \mathcal{E}_p$ を見つけることが出来る：**

$$\{f \in A(\mathbb{C}) : \overline{\operatorname{ord}}\, f < \alpha\} \subset H^p(\mathbb{C}\backslash E) \subset \{f \in A(\mathbb{C}) : \underline{\operatorname{ord}}\, f \leqq \alpha\}. \tag{1.6.11}$$

本論文の主要定理 1.4.2 の場合と同様，先ず上の主張の Hardy-Orlicz 版を用意し，その系として上の定理 1.6.10 を第 7 節の小節 7.2 に於いて導く．定理 1.4.4 の deg を ord で置き換えた対応主張として，又系 1.6.8 の精密化として，次の主張が成り立つ：

定理 1.6.12. **任意の指数 $0 < p < \infty$ に対して，或る $E \in \mathcal{E}_p$ があって**

$$H^p(\mathbb{C}\backslash E) \supset \{f \in A(\mathbb{C}) : \operatorname{ord} f < \infty\} \tag{1.6.13}$$

となる．ここで (1.6.13) の包含関係を等号で置き換えることは決して出来ない.

上の最後の部分は系 1.6.8 そのものである．(1.6.13) を成り立たせる $E \in \mathcal{E}_p$ の存在證明は (1.6.11) の第 1 の包含證明と軌を一にするものであるが，これは第 7 節の小節 7.4 に於いて与える．

2. Hardy-Orlicz 空間の比較

2.1. Jensen の不等式. 実数直線 $\mathbb{R}$ 上の実数値函数 $s = \Phi(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ が**凸函数**であるとは，任意の閉区間 $[a, b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ に対して，2 本の縦線 $t = a$ と $t = b$ 及び $s = \Phi(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ のグラフと無限遠直線 $s = +\infty$ $(a \leqq t \leqq b)$ により囲まれる図形 (図 2 参照)

$$T := \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : a \leqq t \leqq b,\ \Phi(t) \leqq s < \infty\} \tag{2.1.1}$$

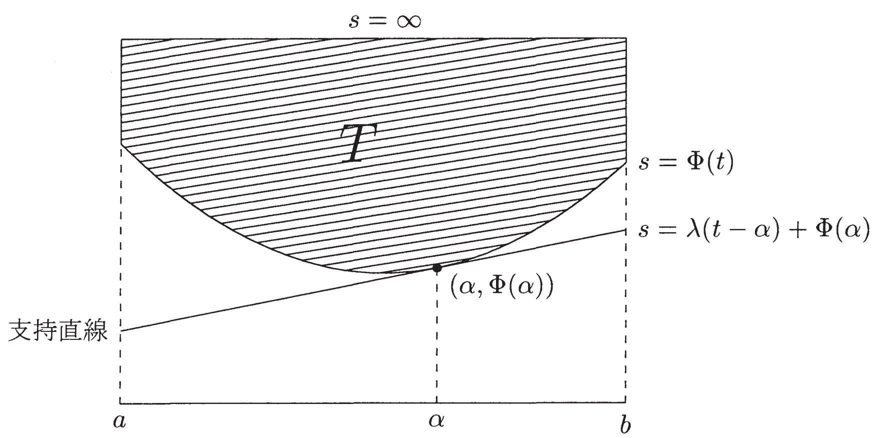

図 2

が凸集合となることであるとする．凸函数は自動的に連続である．T が凸集合だから T の境界点 $(\alpha, \Phi(\alpha))$ $(a \leqq \alpha \leqq b)$ を通る直線 $s = \lambda(t-\alpha) + \Phi(\alpha)$ $(a \leqq t \leqq b)$ で，T の下側に位置する，即ち

$$\lambda(t-\alpha) + \Phi(\alpha) \leqq \Phi(t) \quad (a \leqq t \leqq b) \tag{2.1.2}$$

を満足するものが少なくとも一本は見つけることが出来る．この様な直線を凸函数 Φ の α に於ける**支持直線**と言う．確率測度空間 (Ω, μ) を考える．Φ を $\mathbb{R}$ 上の凸函数とし，$[a, b] \subset \mathbb{R}$ を閉区間とするとき (Ω, μ) 上の可積分函数 $f(\omega)$ で $a \leqq f(\omega) \leqq b$ $(\omega \in \Omega)$ となるものに対して

$$\Phi\left(\int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega)\right) \leqq \int_\Omega \Phi(f(\omega))\, d\mu(\omega) \tag{2.1.4}$$

が成立する．これが **Jensen の不等式**と呼ばれるもので，以下本論文で扱う所の技術的基礎を支えるものの重要な道具の一つである．一般的で初等的な不等式の一つなので，古くから様々な證明が与えられているが，次の A. Zygmund [20] に依るものが抜群に簡明であるので，不必要かも知れぬが念の為記しておく：

(2.1.4) の證明： $\alpha := \int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega)$ とすると，$a \leqq \alpha \leqq b$ なので (2.1.1) の T の $(\alpha, \Phi(\alpha))$ に於ける支持直線の一つを $s = \lambda(t-\alpha) + \Phi(\alpha)$ とすると (2.1.2) に於いて $t = f(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ を代入して

$$\lambda(f(\omega) - \alpha) + \Phi(\alpha) \leqq \Phi(f(\omega)) \quad (\omega \in \Omega)$$

となる．この両辺を Ω 上 μ で積分すると

$$\lambda\left(\int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega) - \alpha \int_\Omega d\mu(\omega)\right) + \Phi(\alpha)\int_\Omega d\mu(\omega) \leqq \int_\Omega \Phi(f(\omega))\, d\mu(\omega)$$

である．左辺第 1 項は $\lambda(\alpha - \alpha) = 0$, 第 2 項は $\Phi(\alpha) = \Phi(\int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega))$, 上記不等式は結局 (2.1.4) そのものである． □

Jensen の不等式の重要な応用を一つ述べる．$\mathbb{C}$ の任意領域 R をとり u は R 上**劣調和**とする．$B = B(c, r)$ を $\overline{B} \subset R$ である中心 c 半径 $0 < r < \infty$ の任意の閉円板とするとき，R 上の上半連続な函数 u が劣調和となる必要十分条件は，u が R 上**劣平均値の性質**をもつことである，即ち，任意の許容円板 $B = B(c, r)$ について

$$u(c) \leqq \int_{\partial B} u(c + re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \tag{2.1.5}$$

となることである．さて，$\Phi(t)$ は $\mathbb{R}$ 上の凸函数であり更に劣調和函数 u の値域を含む区間上**非減少**であると仮定する．この仮定のもとで $\Phi(u)$ は又劣調和となることが言える：

命題 2.1.6. 領域 $R \in \mathbb{C}$ 上 u が劣調和函数で，Φ は $\mathbb{R}$ 上凸函数で更に u の値域を含む区間上非減少であるとする．このとき合成函数 $\Phi(u)$ は又 R 上劣調和である．

證明： u は (2.1.5) を満たす．その両辺の Φ をとるとき

$$\Phi(u(c)) \leqq \Phi\left(\int_{\partial B} u(c + re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}\right) \leqq \int_{\partial B} \Phi\left(u(c + re^{i\theta})\right) \frac{d\theta}{2\pi} \tag{2.1.7}$$

となるから $\Phi(u)$ は R 上劣平均値の性質をもつので $\Phi(u)$ は R 上劣調和となる．不等式 (2.1.7) の最初の不等式は Φ に非減少性の仮定を与えたことから成立し，(2.1.7) の不等式の二番目のものは Jensen の不等式そのものである． □

2.2. Hardy-Orlicz 空間. $\mathbb{R}$ 上の凸函数 Φ を $\mathbb{R}^+ := \{\xi \in \mathbb{R} : \xi \geqq 0\}$ に限定し，$\Phi - \Phi(0)$ で置き換えることで $\Phi(0) = 0$ と常に出来る．更に Φ が $\mathbb{R}^+$ 上非定数，非減少とすると，或る $0 \leqq t_0 < \infty$ が存在して，$\Phi(t_0) = 0, \Phi(t) > 0$ $(t > t_0)$ となり，更に $[t_0, \infty)$ 上 Φ は増加函数となる．これらの条件を持つ Φ を以後本論文では，$\mathbb{R}^+$ 上の許容凸函数，又は簡単に単に $\mathbb{R}^+$ 上の凸函数と呼ぶ．よって Φ が $\mathbb{R}^+$ 上の**許容凸函数**とは，$\Phi(0) = 0$ であり，連続非定数かつ非減少で $\Phi(t) \equiv 0$ $(t < 0)$ となる $\mathbb{R}$ 上の凸函数のことである，として良い．

$\mathbb{R}^+$ 上の許容凸函数 Ψ, Φ $\Lambda, \cdots$ 達の間の二つの二項関係 $\Psi \prec \Phi$ (又は $\Phi \succ \Psi$ も同意) と $\Psi \sim \Phi$ を次の様に定める．先ず 2 定数 $a > 0, b \geqq 0$ を適当に選んで

$$\Psi(t) \leqq a\Phi(t) + b \quad (t \in \mathbb{R}^+)$$

と出来るならば $\Psi \prec \Phi$ (又は $\Phi \succ \Psi$) と記す．更に $\Psi \prec \Phi$ かつ $\Phi \prec \Psi$ となるとき $\Psi \sim \Phi$ と記す．すると，(i) $\Phi \prec \Phi$, (ii) $\Psi \prec \Phi$ かつ $\Psi \succ \Phi$ ならば $\Psi \sim \Phi$, (iii) $\Psi \prec \Phi$ かつ $\Phi \prec \Lambda$ ならば $\Psi \prec \Lambda$, の順序の 3 公理を満たすので，この意味で $\prec$ は許容凸函数間の**順序関係**である．又 (α) $\Phi \sim \Phi$, (β) $\Phi \sim \Psi$ ならば $\Psi \sim \Phi$, (γ) $\Psi \sim \Phi$ かつ $\Phi \sim \Lambda$ なら $\Psi \sim \Lambda$, の同値関係の三公理を満たすので $\Psi \sim \Phi$ は $\mathbb{R}^+$ 上の許容凸函数間の**同値関係**である．Φ を $\mathbb{R}^+$ 上非定数非減少凸函数とする，即ち Φ は $\mathbb{R}^+$ 上許容凸函数の条件の内 $\Phi(0) = 0$ 以外はすべて満たす (従って $\Phi(0) \neq 0$ かも知れぬ) ものとする．このとき Φ を $\mathbb{R}^+$ 上**準許容凸函数**とでも呼んでおく．そのときもし $\Phi(0) \neq 0$ ならば $\Phi(t)$ を $\mathbb{R}^+$ 上では $\Phi(t) - \Phi(0)$ で置き換え ($(-\infty, 0)$ 上では 0 で置き換え) たものを Φ^* と記すとき，Φ^* が $\mathbb{R}^+$ 上許容凸函数に出来る．そうしたとき Φ^* を準許容凸函数 Φ の (一つの) **許容凸函数化**と言うことにしよう．すると二項関係 $\succ$ と $\sim$ は準許容凸函数族に迄拡げることが出来る，即ち Ψ と Φ が $\mathbb{R}^+$ 上準許容凸函数とするとき，$\Psi \succ \Phi \Longleftrightarrow \Psi^* \succ \Phi^*$, $\Psi \sim \Phi \Longleftrightarrow \Psi^* \sim \Phi^*$ と定めるのである．一例として，以後でもしばしば現れる $\Phi(t) = e^{pt}$ $(0 < p < \infty)$ を見る．これは準許容凸函数で $\Psi(t) = e^{pt} - 1$ は許容凸函数であるが $\Phi^* \sim \Psi^*$ なので $\Phi \sim \Psi$, つまり $e^{pt} - 1 \sim e^{pt}$ と言う具合に使うことが正当化される．Φ に対する Φ^* は $\Phi = \Phi^*$ かもしれぬし Ψ に対して Ψ^* は一般に $\Psi = \Psi^*$ でもない．かくの如く雑ながら便利な記法ではある．

領域 $R \in \mathbb{C}$ を取る．$f \in A(R)$ に対し $f \equiv 0$ なら $|f|$ は R 上劣調和であるばかりでなく $\log|f|$ も R 上劣調和で，$\log^+|f| = \max\{\log|f|, 0\}$ も R 上劣調和で或る．それ故許容凸函数 Φ に対して $\Phi(\log^+|f|)$ は R 上劣調和函数となる．元々 $f \in A(R)$ が $f \equiv 0$ であっても $\log 0 = -\infty$, 従って $\log^+ 0 = 0$, と解して $\Phi(\log^+|f|) = \Phi(0) = 0$ だから上の主張で結果的には $f \equiv 0$ を除外しなくても良いこととなる．そこで R 上の劣調和函数 $\Phi(\log^+|f|)$ は $+\infty$ も許して R 上の最小調和優函数をもつので，これを $\widehat{\Phi(\log^+|f|)}$ と記すとき

$$H^\Phi(R) := \{f \in A(R) : \widehat{\Phi(\log^+|f|)} < \infty\} \tag{2.2.1}$$

である函数族 $H^\Phi(R)$ を R 上の Φ による **Hardy-Orlicz 空間**と呼ぶ．しばしば Φ を $H^\Phi(R)$ の**ノルム**と言うこともある．$\Phi(t) = e^{pt} - 1$ $(\sim e^{pt})$ $(0 < p < \infty)$ は $\mathbb{R}^+$ 上の許容凸函数であるが，実はこのとき $H^\Phi(R) = H^p(R)$ となることがわかる．それ故 Hardy-Orlicz 空間 H^Φ の全体は Hardy 空間 H^p $(0 < p < \infty)$ の全体を含むので Hardy-Orlicz 空間は Hardy 空間の一般化と考えられる ($H^\infty(R)$ は両族に付け加えて適当な理解で考えよう)．とにかく $H^\infty(R) \subset H^p(R)$ $(0 < p < \infty)$ と見られる如く $H^\infty(R) \subset H^\Phi(R)$ (Φ はすべての許容凸函数) と考えられる．
E を $\mathbb{C}$ の完閉集合 (即ち有界閉集合) で，$E \subset R$ となる任意の領域 $R \subset \mathbb{C}$ に対して

$$H^\Phi(R \backslash E) = H^\Phi(R) \tag{2.2.2}$$

となるとき E は**H^Φ除去可能集合**と言ってこの様な E の全体を $\mathcal{N}_{H^\Phi} = \boldsymbol{\mathcal{N}_\Phi}$ と記す．$E \in \mathcal{N}_\Phi$ は又**$\boldsymbol{\mathcal{N}_\Phi}$零集合**とか単に**$\boldsymbol{\mathcal{N}_\Phi}$集合**とかも言う．これは完全非連結集合となる．$\Phi(t) = e^{pt} - 1$ のときは特に $\mathcal{N}_{H^p} = \mathcal{N}_p$ ($\mathcal{N}_{H^\infty} = \mathcal{N}_\infty$) と記す．(2.2.2) の条件は $R = \mathbb{C}$ の場合も含まねばならぬ故 $H^\Phi(\mathbb{C} \backslash E) = H^\Phi(\mathbb{C})$ も要求される．$\mathbb{C}$ 上の正値調和函数は定数に限られるので，一般に，すべての許容凸函数 Φ に対して，整函数に対する Liouville の定理も援用して

$$H^\Phi(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \tag{2.2.3}$$

であることがわかる．従って $H^\Phi(\mathbb{C} \backslash E) = H^\Phi(\mathbb{C})$ の条件は $H^\Phi(\mathbb{C} \backslash E) = \mathbb{C}$ である．リーマン面の分類理論の記号で $H^\Phi(R) = \mathbb{C}$ となるリーマン面 R の全体を $\mathcal{O}_{H^\Phi} = \mathcal{O}_\Phi$ と記し，$\Phi(t) = e^{pt} - 1$ に対する場合には $\mathcal{O}_{H^p} = \mathcal{O}_p$ である．この記号の R をここでは $\mathbb{C}$ の領域に限定して使っても良い．すると $E \in \mathcal{N}_\Phi$ なら特に $\mathbb{C} \backslash E \in \mathcal{O}_\Phi$ と言うことになる：

$$E \in \mathcal{N}_\Phi \Longrightarrow \mathbb{C} \backslash E \in \mathcal{O}_\Phi \tag{2.2.4}$$

は常に正しい．この逆については，Φ に少々条件を追加した後に論ずる．

Hardy-Orlicz 空間 H^Φ，或いはその調和版で或る**調和 Hardy-Orlicz 空間** h^Φ ($u \in h(R)$ (R 上の調和函数全体) に於いて R 上で劣調和函数 $\Phi(|u|)$ が調和優函数を持つとき，従って $\widehat{\Phi(|u|)} < \infty$ のとき，u は R 上の Hardy-Orlicz 調和函数であると言いその全体を $h^\Phi(R)$ と記した空間，但し R 上の有界調和函数全体の族 $h^\infty(R)$ も調和 Hardy-Orlicz 空間の仲間に加える) に関係するリーマン面の分類理論で，特に重要な役割を担う $\mathbb{R}^+$ 上の凸函数 Φ に課せられる条件として **de la Vallée-Poussin の条件**

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\Phi(t)}{t} = \infty \tag{2.2.5}$$

がある．上の (2.2.5) を満たす $\mathbb{R}^+$ 上の凸函数，即ち我々の許容凸函数，を特に**強凸函数**と呼ぶことにする．又 de la Vallée-Poussin 条件 (2.2.5) を**強凸条件**とも呼ぶ．一般に我々の言う許容凸函数 Φ については $\Phi(t)/t \nearrow (t \nearrow)$ であるので (2.2.5) の左辺は常に確定で

$$0 < \lim_{t\to\infty} \frac{\Phi(t)}{t} \leqq \infty$$

であるから，すべての許容凸函数 Φ は

$$\Phi(t) \succ t$$

を満たし更に

$$\Phi \text{ が非強凸} \iff \Phi(t) \sim t$$

となっている．だから例えば Parreau の定理 ([16])

$$\begin{cases} \Phi \text{ が非強凸} & \Longrightarrow\ h^\Phi(R) = h(R)^+ \ominus h(R)^+ \\ \Phi \text{ が強凸} & \Longrightarrow\ h^\Phi(R) = (h^\infty(R) \text{ の順序完備化}) \end{cases}$$

が成立する．今一つ $\mathbb{R}^+$ 上の許容凸函数 Φ についての有用な条件として

(2.2.6) $$\frac{\Phi(t+\log 2)}{\Phi(t)} = O(1) \quad (t \to \infty)$$

がある．$O(1)$ は所謂 Landau の O である．このとき Φ は $\boldsymbol{\Delta_2}$ **条件** を満たすと言う．上の Δ_2 条件 (2.2.6) は又或る定数 $K > 0$ と $t_0 \in \mathbb{R}^+$ があって

$$\Phi(t+\log 2) \leqq K\Phi(t) \quad (t \geqq t_0)$$

であることと言い換えて良い．特に $K = 2$ かつ $t_0 = 0$ にとれるなら

$$\Phi(t+\log 2) \leqq 2\Phi(t) \quad (t \in \mathbb{R}^+)$$

であるが，そうならば，例えば $f \in A(R)$ に対して，$f \mapsto \mu(f) := \Phi(\log^+|f|)$ を或る種の測度と考えるとき

$$\mu(2f) = \Phi(\log^+|2f|) = \Phi\left((\log|f| + \log 2)^+\right) \leqq \Phi\left(\log^+|f| + \log 2\right) \leqq 2\Phi\left(\log^+|f|\right) = 2\mu(f)$$

となる，即ち

$$\mu(2f) \leqq 2\mu(f)$$

となり，これは測度論で言う doubling condition である．(2.2.6) はこの様なニュアンスの条件と思うと良い．一般に H^p $(0 < p \leqq \infty)$ と違って H^Φ からは欠落している線形性の一部を補完，補填する役割を担うのも (2.2.6) の Δ_2 条件である．

途中結果 (2.2.4) の更なる考察の為凸函数に関して二つの概念 (条件) を導入し，それらの意義，意味合いについて若干の説明を加えた．その流れに沿って，ここで既定どおり (2.2.4) に帰る．他の多くの解析函数族に関しての函数論的零集合の場合，例えば Painlevé 零集合族 $\mathcal{N}_\infty$ の場合では，$E \in \mathcal{N}_\infty \iff \mathbb{C}\backslash E \in \mathcal{O}_\infty$ である様に，(2.2.4) の $\Longrightarrow$ は当然 $\iff$ で置き換え得るのではないかと期待するし，むしろそうであるべきと思うのが多数派であろう．しかるに $\mathcal{N}_\Phi$ の場合意外にも (2.2.4) の逆の成否ははっきりしない．逆の証明を試みるに今一歩の所で頓挫する．例えば $f, g \in H^\Phi$ から $f + g \in H^\Phi$ (加法性) があるとよいと言う状況が現れる論證では何かこれをさける別の手がありそうな気がするが，とにかくこの様な技術的なことで行き詰まり，本質的な所で駄目なのかどうかわからない．現在のところ Hasumi [3] による下記の結果が最良で，Hardy-Orlicz 空間全体でなく特に Hardy 空間に Φ を限定すれば実は無条件で良く知られた

$$E \in \mathcal{N}_p \iff \mathbb{C}\backslash E \in \mathcal{O}_p \quad (0 < p \leqq \infty)$$

を含むと言う意味で，納得しておく．次の結果の詳しい證明は [4] を参照する．

Hasumi の定理：$\boldsymbol{\Phi}$ を $\boldsymbol{\mathbb{R}^+}$ 上の許容凸函数で，強凸及び $\boldsymbol{\Delta_2}$ 条件の二条件を満足するとするならば次の同値関係が成立する：

(2.2.7) $$\boldsymbol{E \in \mathcal{N}_\Phi \iff \mathbb{C}\backslash E \in \mathcal{O}_\Phi.}$$

2.3. 空間の比較. $\mathbb{R}^+$ 上の許容凸函数 Ψ, Φ をとる．最初 $\Psi \prec \Phi$ 又は $\Psi \sim \Phi$ のとき任意の領域 $R \subset \mathbb{C}$ をとるとき空間 $H^\Psi(R)$ と $H^\Phi(R)$ の関係について次の簡単な観察を行う：

命題 2.3.1 $\Psi \prec \Phi$ ならば $H^\Psi(R) \supset H^\Phi(R)$ (即ち，順序 $\prec$ と包含 $\subset$ の方向逆転); $\Psi \sim \Phi$ ならば $H^\Psi(R) = H^\Phi(R)$ (即ち，同値 $\sim$ と等号 $=$ は同調).

證明： $f \in H^\Phi(R)$ ならば或る $U \in h(R)$ があって，R 上 $\Phi(\log^+|f|) \leqq U$ となる．(ここで $h(R)$ は前小節でふれたとおり R 上の調和函数全体の族で，主として Hardy 空間論を含む函数空間論で常用されるが，リーマン面の分類理論では $H(R)$ が伝統的記号である．) $\Psi \prec \Phi$ だから実数 $a>0$ と $b \geqq 0$ があり $\mathbb{R}^+$ 上 $\Psi \leqq a\Phi + b$ であるので，R 上

$$\Psi(\log^+|f|) \leqq a\Phi(\log^+|f|) + b \leqq aU + b \in h(R)$$

となり劣調和函数 $\Psi(\log^+|f|)$ は R 上調和函数族 $aU+b$ をもつので，$f \in H^\Psi(R)$ となるから $H^\Phi(R) \subset H^\Psi(R)$ である (少々無理はあるが $\Psi < \infty$ とみて故に $H^\Psi(R) \supset H^\infty(R)$ と理解することにより $H^\Psi \supset H^\infty$ に瞬時適応には便利である．とにかく各 R で $H^\infty(R)$ は最小の Hardy-Orlicz 空間である)．次に $\Psi \sim \Phi$ ならば $\Psi \prec \Phi$ より $H^\Phi(R) \subset H^\Psi(R)$ に加えて $\Psi \succ \Phi$ より $H^\Psi(R) \subset H^\Phi(R)$ となり $H^\Psi(R) = H^\Phi(R)$ である． □

2.4. 零集合の比較. 空間の比較について，$\Psi \prec \Phi$ 又は $\Psi \sim \Phi$ のとき，Ψ 又は Φ に対応する除去可能集合族 $\mathcal{N}_\Psi = \mathcal{N}_{H^\Psi}$ と $\mathcal{N}_\Phi = \mathcal{N}_{H^\Phi}$ の間の関係について調べる．

命題 2.4.1 $\Psi \prec \Phi$ ならば $\mathcal{N}_\Psi \subset \mathcal{N}_\Phi$ (即ち，順序 $\prec$ と包含 $\subset$ は方向同調)； $\Psi \sim \Phi$ ならば $\mathcal{N}_\Psi = \mathcal{N}_\Phi$ (即ち，同値 $\sim$ と等号 $=$ は同調).

前小節の命題 2.3.1 の證明中にも述べたと同じく，無理矢理 $\Psi \prec \infty$ と見て $\mathcal{N}_\Psi \subset \mathcal{N}_\infty$ が出ることを上の命題の主張とみるなら，実際 $\mathcal{N}_\Psi \subset \mathcal{N}_\infty$ は正しいので，この理解は命題 2.3.1 のそれ同様便利である．即ち，$\mathcal{N}_\infty = \mathcal{N}_{H^\infty}$ は Hardy-Orlicz 零集合族中最も大きい，或いは制約が最も少ないという意味で，最も緩い零族である．$E \in \mathcal{N}_\infty$ は古くから Painlevé 集合と呼ばれるもので，基本知識では，E の線形測度が零ならば $E \in \mathcal{N}_\infty$，また逆に $E \in \mathcal{N}_\infty$ で，或る制約条件，例えば非常に強いが分かり易いものとして，E がある解析曲線の部分集合なら，E は線形測度が零となる．とにかくどんな $E \in \mathcal{N}_\Psi$ も Painlevé 集合ではある．

命題 2.4.1 の證明： $\Psi \prec \Phi$ なら $\mathcal{N}_\Psi \subset \mathcal{N}_\Phi$ となることを示すのに，$\mathbb{C}$ 内の完全非連結集合 $E \in \mathcal{N}_\Psi$ を任意にとり $E \in \mathcal{N}_\Phi$ となることを示せばよい．その為任意の領域 $V \subset \mathbb{C}$ で $E \subset V$ となるものを取るとき $H^\Phi(V\backslash E) = H^\Phi(V)$ となることを示す．その目的で任意の $f \not\equiv 0$ で $f \in H^\Phi(V\backslash E)$ となるものを取るとき，その拡張として $f \in H^\Phi(V)$ を言えばよい．$E \in \mathcal{N}_\Psi$ だから $H^\Psi(V\backslash E) = H^\Psi(V)$ で，$\Psi \prec \Phi$ より命題 2.3.1 によれば

$$f \in H^\Phi(V\backslash E) \subset H^\Psi(V\backslash E) = H^\Psi(V)$$

だから，$f \in H^\Psi(V)$ となるのであれば兎に角 f は V 上の正則函数である．ここで $V \in O_G$ の場合と $V \notin O_G$ の場合に分けて考える．ここに O_G は Green 函数をもたぬリーマン面 (特に $\mathbb{C}$ の部分領域) の全体である．$V \in O_G$ の場合から始める．$f \in H^\Psi(V)$ なので，$u \in h(V)$ があって，V 上

$$\Phi(\log^+|f|) \leqq u$$

となる．領域 R 上の正値調和函数の族 $h^+(R) = \{v \in h(R) : v \geqq 0\}$ をリーマン面の分類理論の方では記号 $HP(R)$ で示すが，それが $\mathbb{R}^+$ 以外の函数を含まぬ様なリーマン面 (特に $\mathbb{C}$ の部分領域) の族を O_{HP} と記すと，$O_G \subset O_{HP}$ は分類理論の示すところである．よって $V \in O_G \subset O_{HP}$ より $u \in h^+(V) = HP(V) = \mathbb{R}^+$ なので $u = \lambda \in \mathbb{R}^+$ より，V 上

$$\Phi(\log^+|f|) \leqq \lambda$$

となり，Ψ は $\mathbb{R}^+$ 上許容凸だから $\Psi(\log^+ t) \nearrow \infty$ $(t \nearrow \infty)$ 故，上不等式より $\log^+|f|$ は V 上有界だから，f は V 上有界で $f \in H^\infty(V)$ である．やはり分類理論では $H^\infty(R) = AB(R)$ と記し $AB(R) = \mathbb{C}$ となるリーマン面 (特に $\mathbb{C}$ の部分領域) R の族を O_{AB} と記すとき，$O_G \subset O_{AB}$ も又分類理論の主張の一つで Liouville の定理 $A(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ の一般化であるが，$V \in O_G$ だから $V \in O_{AB}$ であり，$f \in H^\infty(V) = \mathbb{C}$ だから，或る $\alpha \in \mathbb{C}$ があって $f = \alpha \in H^\Phi(V)$, 即ち，$V \in O_G$ なら $H^\Phi(V\backslash E) = H^\Phi(V)$ となる．

次に $V \notin O_G$ の場合を考える．f は V 上で正則で $f \in H^{\Phi}(V \backslash E)$ である所迄話は進行している．そこである $u \in h^+(V \backslash E)$ があって，$V \backslash E$ 上

$$\Phi(\log^+ |f|) \leqq u$$

となっている．これを利用して $P \in h^+(V)$ で V 上

$$\Phi(\log^+ |f|) \leqq P$$

となる様な P が構成出来たなら，$f \in H^{\Phi}(V)$ となり，やはり證明は完結する．それで残されるところは P の作り方で，これを下に詳細に記述する．

***P* 構成のレシピ**： 上で定めた $E \subset V \notin O_G$ に対して，$E \subset G_1 \subset \overline{G}_1 \subset V$ となる $\mathbb{C}$ の正則領域 G_1 をとり $\partial G_1 = C_1$ と置く (図 3 参照).

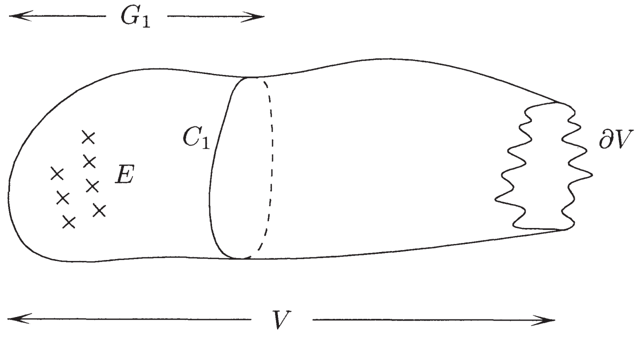

図 3

$v \in h(V \backslash G_1)$ を領域 $V \backslash \overline{G}_1$ 上の境界条件

$$\begin{cases} v|C_1 = \max\limits_{C_1} u - u \\ v|\partial V = 0 \end{cases}$$

に対する調和ディリクレ解とする．又 $w \in h(V \backslash G_1)$ を上と同じ領域 $V \backslash \overline{G}_1$ 上の境界条件

$$\begin{cases} w|C_1 = 1 \\ w|\partial V = 0 \end{cases}$$

の調和ディリクレ解とする，即ち，w は $V \backslash \overline{G}_1$ 上の C_1 の調和測度函数である．$V \notin O_G$ だから $0 < w|(V - \overline{G}_1) < 1$ である．そこで任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$P_n := \begin{cases} \max\limits_{C_1} u + n & (\overline{G}_1 \text{上}) \\ u + v + nw & (V \backslash \overline{G}_1 \text{上}) \end{cases} \tag{2.4.2}$$

と置く．P_n は $\overline{G}_1$ 上定数で勿論 G_1 上調和で，$V \backslash \overline{G}_1$ 上も調和である．$P_n|G_1$ の境界値 (即ち C_1 に於ける境界値) は $\max_{C_1} u + n$, $P_n|(V \backslash \overline{G}_1)$ の C_1 上の境界値は

$$u|C_1 + v|C_1 + n(w|C_1) = u|C_1 + \left(\max_{C_1} u - u|C_1\right) + n = \max_{C_1} u + n$$

で，これらは一致するので P_n は V 上連続である．こうして P_n は V 上の連続函数で $V \backslash C_1$ 上調和となること迄分かった．後残るところは P_n で $n \in \mathbb{N}$ を十分大きくとれば C_1 の各点で P_n は優平均値性を満たし，従って P_n は V 上優調和となることを示す．この目的の為 $E \subset G_1 \subset \overline{G}_1 \subset V$ に加えて，今一つ $E \subset G_1 \subset \overline{G}_1 \subset G_2 \subset \overline{G}_2 \subset V$ となる様な $\mathbb{C}$ 内の正則領域 G_2 を任意にとり，$\partial G_1 = C_1$ と記したと同様，$\partial G_2 = C_2$ と置く (次頁の図 4 参照).

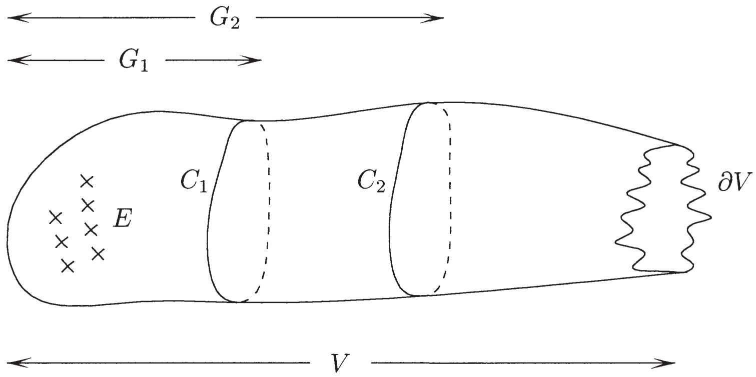

図 4

領域 $G_2\backslash E$ 上で今一つの函数

$$Q_n := \bigl(\max_{C_1} u + n\bigr) - (u + v + nw)$$

を考える．$Q_n|C_1 = 0$ は P_n の連続性そのものである．C_2 上では

$$\begin{aligned} Q_n &\geqq \bigl(\max_{C_1} u + n\bigr) - \bigl(\max_{C_2} u + \max_{C_2} v + n\cdot \max_{C_2} w\bigr) \\ &= -\bigl(\max_{C_2} u - \max_{C_1} u + \max_{C_2} v\bigr) + n\bigl(1 - \max_{C_2} w\bigr) \nearrow +\infty \quad (n \nearrow \infty) \end{aligned}$$

であるから $n \in \mathbb{N}$ を十分大きくとると $Q_n|C_2 \geqq 0$ となる．この様な $n \in \mathbb{N}$ の一つ $n_0 \in \mathbb{N}$ を固定すれば $Q_{n_0}|C_j \geqq 0$ $(j = 1, 2)$ より $\partial(G_2\backslash\overline{G}_1) = C_1 \cup C_2$ だから $Q_{n_0}|\partial(G_2\backslash\overline{G}_1) \geqq 0$ となり $\overline{G}_2\backslash G_1$ 上 $Q_{n_0} \geqq 0$, 即ち,

$$u + v + n_0 w \leqq \max_{C_1} u + n_0 \tag{2.4.3}$$

となる．$n = n_0$ とした (2.4.2) で定まる P_{n_0} の定義式を眺め，これに上の (2.4.3) を適用すれば P_{n_0} が C_1 の各点で優平均値の性質を持つことがわかり，従って P_{n_0} は V 上の優調和函数であることが示された．ここで $\Phi(\log|f|)$ は V 上劣調和であることを想起する．$V\backslash E$ 上 $\Phi(\log^+|f|) \leqq u$ だから，最大値原理より，G_1 上では

$$\max_{G_1} \Phi(\log^+|f|) = \max_{C_1} \Phi(\log^+|f|) \leqq \max_{C_1} u \leqq P_{n_0}|C_1$$

であり，従って $\overline{G}_1$ 上 $\Phi(\log^+|f|) \leqq P_{n_0}$ となり，又 $V\backslash\overline{G}_1$ 上でも $\Phi(\log^+|f|) \leqq P_{n_0}$ となる．だから劣調和函数である $\Phi(\log^+|f|)$ が上から優調和函数である P_{n_0} でおさえられているので V 上

$$\Phi(\log^+|f|) \leqq P \leqq P_{n_0}$$

となる $P \in h(V)$ が存在する． □

3. 調和容量の中間値の定理

3.1. 調和容量の定義. 開 (即ち非完閉) リーマン面 W がグリーン函数を持たぬとき，W は**放物的**であると言い，その様な W 全体の族を O_G と言う記号で表した．逆に W がグリーン函数をもつとき W は**双曲的**である，又は，非放物的である，と言って $W \notin O_G$ と記す．時には W が完閉リーマン面のとき，W を**楕円的**であると言うので，W が開リーマン面であることを W は非楕円的であると言うこともある．そして甚だ雑ながら，W が楕円的である場合も，W を放物的リーマン面族 O_G の仲間に入れることもある．そうであっても W 上グリーン函数がないことには変わりないから許される簡便用法としている．特に平面閉集合 $F \in \mathbb{C}$ が**非極** (nonpolar) であるとは $\mathbb{C}\backslash F$ のどの成分も双曲的領域となることとする．

ここからは正実数 $a > 0$ と，$F \subset B(a) := \{|z| < a\}$ である非極完閉集合 $F \subset \mathbb{C}$ で $\mathbb{C}\backslash F$ が原点 $z = 0$ を含みかつ連結なものを固定する．その上で $K \subset \mathbb{C}\backslash\overline{B}(a) := \{|z| > a\}$ である様々の変動する完閉集合 K 達に対する集合関数

$$K \mapsto c(K)$$

を以下の様に定義する．位相記号は $\mathbb{C}$ の相対位相に関するものとして，開集合 $(\mathbb{C}\backslash F)\backslash K$ の相対境界 $\partial((\mathbb{C}\backslash F)\backslash K)=\partial F\cup\partial K$ 上の連続函数 χ で，$\chi|\partial F=0$ かつ $\chi|\partial K=1$ である境界値に対する開集合 $(\mathbb{C}\backslash F)\backslash K$ 上の Dirichlet 問題の Perron-Wiener-Brelot の意味での解である調和函数を $H_\chi^{(\mathbb{C}\backslash F)\backslash K}$ と言う標準的記号で表す ([1] 参照)．そのとき量

$$c(K):=H_\chi^{(\mathbb{C}\backslash F)\backslash K}(0) \tag{3.1.1}$$

を完閉集合 $K\subset\{|z|>a\}$ の $\mathbb{C}\backslash F$ に関する**調和容量**又は単に**容量** (capacity) と呼ぶ．$c(K)$ の性質を調べるのに次の様な函数を使うと便利である．完閉集合 $K\subset\{|z|>a\}$ は K の境界 ∂K と K の内点集合 $\mathring{K}$ からなる．更に ∂K の各点は開集合 $(\mathbb{C}\backslash F)\backslash K$ に関する Dirichlet 問題の意味での正則点 (regular point) であるか又は非正則点 (irregular point) であるかのいずれかである．よって ∂K は正則点の全体である $\partial_r K$ と非正則点の全体である $\partial_i K$ の互いに素な 2 集合の和集合で従って $K=\mathring{K}\cup\partial_r K\cup\partial_i K$ と表せる．そこで $\mathbb{C}\backslash F$ 上の函数 u を

$$u(z)=\begin{cases} H_\chi^{(\mathbb{C}\backslash F)\backslash K}(z) & (z\in(\mathbb{C}\backslash F)\backslash K)\\ 1 & (z\in\mathring{K}\cup\partial_r K)\\ \liminf\limits_{\zeta\in(\mathbb{C}\backslash F)\backslash K,\zeta\to z} H_\chi^{(\mathbb{C}\backslash F)\backslash K}(\zeta) & (z\in\partial_i K)\end{cases} \tag{3.1.2}$$

で定義し $c(K)$ の**決定函数**と名付けよう．無論 $c(K)=u(0)$ であるが，更に u は $\mathbb{C}\backslash F$ 上の下半連続函数であることがわかる．$\partial_i K$ は極集合だから $\mathbb{C}\backslash F$ 上の優調和函数 $s>0$ で $s|\partial_i K=+\infty$ で $s|((\mathbb{C}\backslash F)\backslash K)<\infty$ となるものがとれる (そして欲するなら，s は $(\mathbb{C}\backslash F)\backslash\partial_i K$ 上調和にとることも可能 ([19], [17], [12] 等参照) であるが，こゝでは必要ない)．任意の $\varepsilon>0$ に対し

$$(u)_\varepsilon:=(1+\varepsilon)u+\varepsilon s \tag{3.1.3}$$

と置くと，これは又 $\mathbb{C}\backslash F$ 上の下半連続函数で，従って $\{(u)_\varepsilon>1\}$ は開集合であって

$$K\subset\{(u)_\varepsilon>1\} \tag{3.1.4}$$

となる．この $(u)_\varepsilon$ を u の **ε-優函数** と呼ぶことにする．

注意 3.1.5. 容量 $c(K)$ を (3.1.1) で定義したときと同じ状況で，完閉集合 $K\subset\{|z|>a\}$ をとるとき，開集合 $(\mathbb{C}\backslash F)\backslash K$ に関する観測点 $z=0$ の**調和測度** μ とは，$\partial((\mathbb{C}\backslash F)\backslash K)=\partial F\cup\partial K$ 上の Borel 測度 μ で各 $\varphi\in C(\partial F\cup\partial K)$ に対して

$$H_\varphi^{(\mathbb{C}\backslash F)\backslash K}(0)=\int_{\partial F\cup\partial K}\varphi(\zeta)\,d\mu(\zeta) \tag{3.1.6}$$

となる μ のことである (結果的には，上式は $\varphi\in L^1(\partial F\cup\partial K;\mu)$ で成り立つ)．特に，$K\subset\{|z|>a\}$ を $\mathbb{C}\backslash K$ が連結で非極で $K=\partial K$ となっているものとする (例えば K が線分)．$\chi_K|\partial F=0$, $\chi_K|K=1$ である $\chi_K\subset C(\partial F\cup K)$ を (3.1.6) の φ に取れば

$$\mu(K)=H_{\chi_K}^{(\mathbb{C}\backslash F)\backslash K}(0)$$

である．これを (3.1.1) と較べると

$$c(K)=H_{\chi_K}^{(\mathbb{C}\backslash F)\backslash K}(0)$$

なので，この様な $K\subset\{|z|<a\}$ に対しては

$$c(K)=\mu(K) \tag{3.1.7}$$

である．かかる K を一つの空間として固定して，$L\subset K$ である完閉集合を色々と変化させて得られる***K*上**の二つの集合函数

$$L\mapsto c(L):=H_{\chi_L}^{(\mathbb{C}\backslash F)\backslash L}(0),\ L\mapsto\mu(L):=H_{\chi_L}^{(\mathbb{C}\backslash F)\backslash K}(0)$$

を考える．後者では $\chi_L|(K\backslash L)=0$ としているので $\partial F\cup\partial K$ 上連続でなく L^1 である．すると一般には $c(L)\neq\mu(L)$ で，実際 μ は K 上の集合函数としては Borel 測度に出来るが，c は K 上の集合函数としては，μ から程遠く，有限加法性す

らない．この様に容量 c と測度 μ は，たまたま (3.1.7) が成り立つからと言って，全く違うものなので，混同することがない様にしたい．

3.2. 調和容量の初等的性質. 以下では，先ず調和容量についての極く基本的な性質 (例えば, [5] 参照) を述べ，それを利用して調和容量の中間値の定理を示すことを目指す．
K を $\{|z|>a\}$ 内の完閉集合とするとき，その調和容量 $c(K)$ について，その定義 (3.1.1) から明白である様に

$$0 \leqq c(K) < 1 \tag{3.2.1}$$

である．$c(K)$ の評価はともかく，その具体的な値を求めることは，F の在り方，その曖昧さ等の故大抵不可能であるが，定義上自明な

$$c(\emptyset) = 0 \tag{3.2.2}$$

を除いて，唯一の例外は 1 点からなる集合の容量である．即ち

$$c(\{\zeta\}) = 0 \quad (\zeta \in \{|z|>a\}) \tag{3.2.3}$$

である．以下にこの證明を述べるが，下記 (3.2.4) を使うとすると，(3.2.3) は (3.2.2) を保証すると考えられる : $\emptyset \subset \{\zeta\}$ と考えて $0 \leqq c(\emptyset) \leqq c(\{\zeta\}) = 0$ より (3.2.2) が従う．

(3.2.3) の證明： 領域 $(\mathbb{C}\backslash F)\backslash\{\zeta\}$ と $\chi|(\mathbb{C}\backslash F) = 0$, $\chi|\{\zeta\} = 1$ である境界函数 χ で与えられる Dirichlet 問題の解 $H_\chi^{(\mathbb{C}\backslash F)\backslash\{\zeta\}}$ により $c(\{\zeta\})$ は

$$c(\{\zeta\}) = H_\chi^{(\mathbb{C}\backslash F)\backslash\{\zeta\}}(0)$$

で与えられる．F は非極集合だから $\mathbb{C}\backslash F$ は Green 函数 $g(z,\zeta)$ をもつ．任意の正数 $\varepsilon>0$ に対し $\varepsilon g(\cdot,\zeta)$ は上の Dirichlet 問題の Perron 上函数故

$$H_\chi^{(\mathbb{C}\backslash F)\backslash\{\zeta\}}(z) \leqq \varepsilon g(z,\zeta) \quad (z \in (\mathbb{C}\backslash F)\backslash\{\zeta\})$$

となり $\varepsilon \searrow 0$ となり $H_\chi^{(\mathbb{C}\backslash F)\backslash\{\zeta\}} \equiv 0$ となり，従って $c(\{\zeta\}) = 0$ が結論される． □

次に容量 c の**単調性**をみる．即ち $\{|z|>a\}$ 内の二つの完閉集合 $K_1 \subset K_2$ に対し

$$c(K_1) \leqq c(K_2) \quad (K_1 \subset K_2) \tag{3.2.4}$$

が成り立つ．
證明： $c(K_j)$ の決定函数を u_j とし $(j=1,2)$, 任意の正数 $\varepsilon>0$ に対し u_2 の ε-優函数を $(u_2)_\varepsilon$ とする．$\{(u_2)_\varepsilon > 1\}$ は K_2 を含む開集合故，K_1 を含む開集合でもあり，$(\mathbb{C}\backslash F)\backslash K_1$ 上 $(u_2)_\varepsilon \geqq u_1$ となる．$\varepsilon \searrow 0$ として $(\mathbb{C}\backslash F)\backslash K_1$ 上 $u_1 \leqq u_2$ となり，これを計測点 $z=0$ でみて (3.2.4) が結論出来る． □

容量 c の劣加法性をもつこと，即ち $\{|z|>a\}$ の任意の二つの完閉集合 K_1 と K_2 に対し

$$c(K_1 \cup K_2) \leqq c(K_1) + c(K_2) \tag{3.2.5}$$

となる．

證明： $c(K_1)$, $c(K_2)$, 及び $c(K_1 \cup K_2)$ の決定函数を夫々 u_1, u_2 及び u_3 とし，任意の正数 $\varepsilon>0$ に対し，u_j の ε-優函数を $(u_j)_\varepsilon$ とする $(j=1,2)$.

$$U := \{(u_1)_\varepsilon > 1\} \cup \{(u_2)_\varepsilon > 1\}$$

は開集合で $K_1 \cup K_2$ を含む故に $(u_1)_\varepsilon + (u_2)_\varepsilon > 1$ が成り立つので，$(\mathbb{C}\backslash F)\backslash(K_1 \cup K_2)$ 上

$$u_3 \leqq (u_1)_\varepsilon + (u_2)_\varepsilon$$

が得られる．故に $\varepsilon \searrow 0$ として $u_3 \leqq u_1 + u_2$ が $(\mathbb{C}\backslash F)\backslash(K_1 \cup K_2)$ で成り立ち，これを計測点 $z=0$ で見ると (3.2.5) の成立がわかる． □

最後に謂所容量の**単調連続性**を示す：$(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\{|z|>a\}$ 内の完閉集合で $K_1 \supset K_2 \supset \cdots\cdots K_n \supset K_{n+1} \supset \cdots$ を満たすとすると

$$\lim_{n\to\infty} c\,(K_n) = c\Bigl(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n\Bigr) \tag{3.2.6}$$

となる．

証明： 簡単の為 $K = \cap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ と置くことにすれば，$K_n \downarrow K\ (n\to\infty)$ である．$c\,(K_n)\ (n\in\mathbb{N})$ と $c(K)$ の決定函数を夫々 $u_n\ (n\in\mathbb{N})$ と u とする．(3.2.4) によれば実数列 $(c\,(K_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は単調減少で，$(\mathbb{C}\backslash F)\backslash K_n$ 上 $u_n \geqq u_{n+1} \geqq u\ (n\in\mathbb{N})$ となる．故に $(\mathbb{C}\backslash F)\backslash K$ 上 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ は調和函数を定め

$$v := \lim_{n\to\infty} u_n \geqq u$$

となる．そして (3.2.6) の左辺は $v(0)$，右辺は $u(0)$ なので，$v \geqq u$ がわかっている今，反対方向の不等式 $v \leqq u$ が $(\mathbb{C}\backslash F)\backslash K$ 上成立することを示せば證明は終わる．そこで任意の正数 $\varepsilon > 0$ をとり，u の ε-優函数 $(u)_\varepsilon$ をとる．$\{(u)_\varepsilon > 1\}$ は $K = \cap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ を含む開集合なので，一般に集合 $S \subset \mathbb{C}$ に対し $S^c = \mathbb{C}\backslash S$ とかくとき

$$\{(u)_\varepsilon > 1\}^c \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n^c$$

となり $\{(u)_\varepsilon > 1\}^c$ は $\mathbb{C}$ 内完閉故有限開被覆定理によりある番号 $m\in\mathbb{N}$ が定まって

$$\{(u)_\varepsilon > 1\}^c \subset \bigcup_{n=1}^{m} K_n^c = K_m^c$$

又は $K_n \subset \{(u)_\varepsilon > 1\}\ (n\in\mathbb{N}, n\geqq m)$ となる．だから $(\mathbb{C}\backslash F)\backslash K_n$ 上 $u_n \leqq (u)_\varepsilon\ (n\in\mathbb{N}, n\geqq m)$ となり，$n\to\infty$ として $(\mathbb{C}\backslash F)\backslash K$ 上 $v \leqq (u)_\varepsilon$ となり，ついで $\varepsilon \searrow 0$ として $v \leqq u$ となる． □

$\{|z|>a\}$ 内の点 ζ に中心を持つ半径 $r \in (0, |\zeta|-a)$ の開円板および閉円板を夫々 $B(\zeta,r)$ および $\overline{B}(\zeta,r)$ と記す．そのとき

$$\lim_{r\to 0} c\left(\overline{B}(\zeta,r)\right) = 0 \tag{3.2.7}$$

となる．事実，$\overline{B}(\zeta,r) \searrow \{\zeta\}$ だから (3.2.3), (3.2.4), (3.2.6) より上の (3.2.7) は自明に従う．この (3.2.7) より，任意の正数 $\varepsilon > 0$ と任意の $\zeta \in \{|z|>a\}$ に対して，ε と ζ で定まる正数 $r_0 \in (0, |\zeta|-a)$ があって

$$0 < c\left(\overline{B}(\zeta,r)\right) < \varepsilon \quad (0 < r \leqq r_0) \tag{3.2.8}$$

となることがわかる．このような $B(\zeta,r)$ を ζ に於ける一つの ε-円板と言う．だからどの点 $\zeta \in \{|z|>a\}$ も ε-円板をもつ．

3.3. 中間値の定理. $\{|z|>a\}$ 内の完閉集合 $K_1 \subset K_2$ があって $c(K_1) < c(K_2)$ とする．そのとき $c(K_1) < \alpha < c(K_2)$ である任意の実数 α に対して $K_1 \subset K \subset K_2$ となる完閉集合 K で $c(K) = \alpha$ となるものが常に見つけることが出来るなら応用上大変に便利である．そのとき容量 c は**中間値の定理**を満たすと言う．本節では，この定理が成り立つことを述べその證明を与えることを目的とする．

定理 3.3.1 (中間値の定理). ***$K \subset \{|z|>a\}$ を $c(K) > 0$ である任意の完閉集合とする．そのとき K のすべての部分集合 E の容量 $c(E)$ の全体は，閉区間 $[0, c(K)]$ となる．換言すれば任意の実数 $0 \leqq \alpha \leqq c(K)$ に対し $c(E) = \alpha$ となる K の完閉部分集合 E がある．***

證明： $E = \emptyset$ なら $c(E) = 0$, $E = K$ なら $c(E) = c(K)$ 故，$0 < \alpha < c(K)$ である任意の α に対して $c(E) = \alpha$ となる完閉集合 $E \subset K$ の存在を示せばよい．最初に先ず $c(E) = \alpha$ ではなく，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\alpha < c(E) \leqq \alpha + \varepsilon$ となる，

より緩い条件を満たす完閉部分集合 $E \subset K$ の存在を示すという準備的主張を導く．これを第 1 段とし，この弱い主張を精密化して本来の定理の主張迄高める部分を證明の第 2 段とする．

第 1 段．$c(L) > 0$ となる K の任意の完閉部分集合 L, 任意の正実数 $\beta \in (0, c(L))$, 及び任意の正数 $\varepsilon \in (0, c(L) - \beta)$ を与える．そのとき L の完閉部分集合 M で

$$\beta < c(M) \leqq \beta + \varepsilon \tag{3.3.2}$$

となるものが取れることを示す．各点 $\zeta \in L$ に対し，ζ 中心の ε-円板 $U(\zeta)$ を 1 つづつ取る．$L \subset \cup_{\zeta \in L} U(\zeta)$ で L は完閉故有限個の $\zeta_j \in L$ $(j = 1, \cdots, n)$ で $L \subset \cup_{j=1}^{n} U(\zeta_j)$ となるものが取れる．そこで $L = L_0$ と置き，更に

$$\begin{cases} L_1 := L_0 \backslash U(\zeta_1) \\ L_2 := L_1 \backslash U(\zeta_2) \\ \cdots\cdots \\ L_j := L_{j-1} \backslash U(\zeta_j) \\ \cdots\cdots \\ L_n := L_{n-1} \backslash U(\zeta_n) \end{cases}$$

とすると各 L_j $(j = 1, \cdots, n)$ は完閉であり

$$L = L_0 \supset L_1 \supset L_2 \supset \cdots \supset L_{j-1} \supset L_j \supset \cdots \supset L_{n-1} \supset L_n = \emptyset$$

である．$L_j \cup \overline{U(\zeta_j)} \supset L_j \cup U(\zeta_j) = L_{j-1}$, 即ち

$$L_j \cup \overline{U(\zeta_j)} \supset L_{j-1} \quad (j = 1, \cdots, n)$$

となって居るので，$c\big(\overline{U(\zeta_j)}\big) < \varepsilon$ $(j = 1, \cdots, n)$ に注意して，(3.2.4) と (3.2.5) より

$$c(L_j) \leqq c(L_{j-1}) \leqq c\big(L_j \cup \overline{U(\zeta_j)}\big) \leqq c(L_j) + c\big(\overline{U(\zeta_j)}\big) \leqq c(L_j) + \varepsilon$$

が導かれる，即ち

$$0 \leqq c(L_{j-1}) - c(L_j) \leqq \varepsilon \quad (j = 1, \cdots, n) \tag{3.3.3}$$

となる．再び (3.2.4) より

$$c(L) = c(L_0) \geqq c(L_1) \geqq c(L_2) \geqq \cdots \geqq c(L_{j-1}) \geqq c(L_j) \geqq \cdots \geqq c(L_{n-1}) \geqq c(L_n) = 0$$

である．$c(L) = c(L_0) > \beta + \varepsilon > c(L_n) = 0$ に於いて，$c(L_1), c(L_2), \cdots$ の数列が初めて区間 $(0, \beta + \varepsilon]$ に足を踏み入れる番号を j_ε とする：

$$j_\varepsilon := \min\{k : c(L_k) \leqq \beta + \varepsilon \ (k = 1, \cdots, n)\}.$$

勿論 $j_\varepsilon \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$ である．j_ε の定義より

$$c\big(L_{j_\varepsilon}\big) \leqq \beta + \varepsilon < c\big(L_{j_\varepsilon - 1}\big)$$

となる．上の右側の不等式と (3.3.3) から，$\beta + \varepsilon < c\big(L_{j_\varepsilon - 1}\big) \leqq c\big(L_{j_\varepsilon}\big) + \varepsilon$ となり $\beta < c\big(L_{j_\varepsilon}\big)$ だから，$M = L_{j_\varepsilon}$ にとれば，$\beta < c(M) \leqq \beta + \varepsilon$, 即ち，(3.3.2) が従う．

第 2 段．$K_0 := K$ と置くと，これは $c(K_0) > 0$ となる K の完閉部分集合である．

$$\varepsilon_1 := \frac{c(K_0) - \alpha}{1}$$

と置くと，$\varepsilon_1 = c(K) - \alpha > 0$ で，ε_1 は正数である．第 1 段から K_0 の完閉部分集合 K_1 で

$$\alpha < c(K_1) \leqq \alpha + \varepsilon_1$$

となるものがとれる．次に

$$\varepsilon_2 := \frac{c(K_1)-\alpha}{2} < \frac{\varepsilon_1}{2}$$

に対して，$\varepsilon_2 > 0$ であって

$$\alpha < c(K_2) \leqq \alpha + \varepsilon_2$$

となるものを第 1 段により取ることが出来る．以下同様にして帰納的に正数列 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ と完閉集合列 $K_1, K_2, \cdots$ を

$$\varepsilon_{n+1} := \frac{c(K_n)-\alpha}{n+1} < \frac{\varepsilon_n}{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

で，かつ $K_{n+1} \subset K_n$, 更に

$$\alpha < c(K_{n+1}) \leqq \alpha + \varepsilon_{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

を満たす様に第 1 段を使って作る．$\varepsilon_n \to 0$ $(n \to \infty)$ は作り方より明白であるから $c(K_n) \to \alpha$ $(n \to \infty)$ も又明白である．そこで

$$E := \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$$

と置けば E は $K = K_0$ の完閉部分集合で

$$K = K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_n \supset K_{n+1} \supset \cdots \supset E = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$$

であるから，(3.2.6) により $c(K_n) \to c(E)$ $(n \to \infty)$ となり $c(K_n) \to \alpha$ $(n \to \infty)$ と合わせて $c(E) = \alpha$ が導かれる．□

4. 円環の Harnack 定数

4.1. 調和測度の構成. $R \subset \mathbb{C}$ を双曲的な領域とする, 即ち R は Green 函数 $g(z,w)$ を持つことであった．R 上境界値 $\varphi \in C(\partial R)$ の Perron-Wiener-Brelot の意味の Dirichlet 問題の解を標準的記号で H_φ^R とかいてきた. $w \in R$ に対して $\varphi \to H_\varphi^R(w) : C(\partial R) \to \mathbb{R}$ は有界線型汎函数なので ∂R 上の Borel 測度 μ があって

$$H_\varphi^R(w) = \int_{\partial R} \varphi(\zeta) d\mu(\zeta) \tag{4.1.1}$$

となることが Riesz の定理である．この μ を**測定点** $w \in R$ の R の**調和測度**と言うことも既に述べて来た所である. (4.1.1) は $\varphi \in L^1(\partial R; \mu)$ まで拡張出来る．R の境界 ∂R の一つの成分 Γ が実解析的な Jordan 曲線となって居るとする. $\varphi \in L^1(\partial R; \mu)$ で $\varphi|(\partial R \backslash \Gamma) = 0$ であるとするならば

$$H_\varphi^R(w) = \int_\Gamma \varphi(\zeta) \frac{\partial}{\partial n} g(\zeta, w) ds(\zeta) \tag{4.1.2}$$

となることは Green の公式の帰結である, 但し $\partial/\partial n$ は $\zeta \in \Gamma$ に於ける内法線微分, $ds(\zeta)$ は $\zeta \in \Gamma$ に於ける線素とする．従って

$$d\mu(\zeta) = \frac{\partial}{\partial n} g(\zeta, w) ds(\zeta) \quad (\zeta \in \Gamma) \tag{4.1.3}$$

であり, $\zeta \mapsto \dfrac{d\mu}{ds}(\zeta) = \dfrac{\partial}{\partial n} g(\zeta, w)$ は Γ 上実解析的で $\dfrac{d\mu}{ds}(\zeta) > 0$ であり, $\dfrac{ds}{d\mu}(\zeta) = \left(\dfrac{\partial}{\partial n} g(\zeta, w)\right)^{-1} > 0$ も同様の性質を持つ. $\zeta \in \Gamma$ をとめ, ζ を含む Γ の弧 e を任意にとるとき,

$$\mu(e) = \int_e d\mu(\zeta) = \int_e \frac{\partial}{\partial n} g(\zeta, w) ds(\zeta)$$

であるから微分公式

$$\lim_{|e| \to 0} \frac{\mu(e)}{|e|} = \frac{d\mu}{ds}(\zeta) \tag{4.1.4}$$

が出る, 但し $|e|$ は弧の長さ $\displaystyle\int_e ds$ を意味する記号とする．無論 Γ 上 $\dfrac{s\mu}{ds} \cdot \dfrac{ds}{d\mu} = 1$ である.

4.2. Harnack 定数. 領域 $R \subset \mathbb{C}$ 上の調和函数全体の族を $h(R)$ とし, 函数族に対する通常の記法で $h(R)^+ := \{u \in h(R) : u \geqq 0\}$ と記す. $R \subset \mathbb{C}$ は領域, $\gamma \subset R$ は完閉とする. R と γ のみに依存する定数 α が存在して, 任意の $u \in h(R)^+$ に対し

$$\max_{z \in \gamma} u(z) \leqq \alpha \min_{z \in \gamma} u(z)$$

となることが, Harnack 不等式より従う. この様な α を γ の R に関する (一つの)**Harnack 定数**と呼ぶ. よって α がそうなら, $\alpha \leqq \beta < \infty$ となるすべての β はそうである. この様な α の内最小のものを $\alpha(R, \gamma)$ と記し, 即ち

$$\alpha(R, \gamma) := \inf\{\alpha : \max_{\gamma} u \leqq \alpha \min_{\gamma} u \quad (u \in h(R)^+)\}$$

を γ の R に関する**最小 Harnack 定数**と呼ぶ. これは等角不変量で, Harnack 定数の定義から, γ が固定で $\gamma \subset R$ のまま R が増大すれば $\alpha(R, \gamma)$ は減少し, R が固定され $\gamma \subset R$ のまま γ が増大すれば $\alpha(R, \gamma)$ は増加することが分かる. 特に扱い易く分かり易いのは, $R \subset \mathbb{C}$ が同心円環

$$R = \{a < |z| < b\} \qquad (0 < a < b < \infty)$$

で γ が R の二分円

$$\gamma = \{|z| = \sqrt{ab}\}$$

の場合である. $C(r)$ で中心 $z = 0$, 半径 $0 < r < \infty$ の円を表すとすれば, 上の R は内円 $C(a) = \{|z| = a\}$ と外円 $C(b) = \{|z| = b\}$ の中心 $z = 0$ の同心円で囲まれ, 即ち, $\partial R = C(a) \cup C(b)$ である. $R \setminus \gamma$ は二つの円環から成り, 一つは

$$C(a) \cup C(\sqrt{ab}) = \partial R_a$$

となる円環 R_a, もう一つは

$$C(\sqrt{ab}) \cup C(b) = \partial R_b$$

となる円環 R_b であり, 円環状領域 E の modulus を $\operatorname{mod} E$ と記すことにすると

$$\begin{cases} \operatorname{mod} R = \log \dfrac{b}{a} \\ \operatorname{mod} R_a = \log \dfrac{\sqrt{ab}}{a} = \dfrac{1}{2} \log \dfrac{b}{a} \\ \operatorname{mod} R_b = \log \dfrac{b}{\sqrt{ab}} = \dfrac{1}{2} \log \dfrac{b}{a} \end{cases}$$

だから結局

$$R \setminus \gamma = R_a \cup R_b, \qquad \operatorname{mod} R_a = \operatorname{mod} R_b = \frac{1}{2} \operatorname{mod} R$$

であるので, γ を R の二分円と呼ぶ謂である. この場合の $\alpha(R, \gamma)$ を調べる. $\alpha(R, \gamma)$ は等角不変量なので, 上に与えた (R, γ) を等角写像 $w = \dfrac{1}{\sqrt{ab}} z$ で写すと分かる様に, 像を (R', γ') とすると

$$R' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\frac{b}{a}}} < |w| < \sqrt{\frac{b}{a}} \right\}, \qquad \gamma' = \{|w| = 1\}$$

であり, $\operatorname{mod} R = \log r$ を使って $\alpha(R, \gamma) = A_1(r)$ と記せば, $\operatorname{mod} R' = \log r$ で $\alpha(R', \gamma') = A_1(r)$ である. 勿論 γ' は R' の二分円である. 以上を纏めて述べる:

modulus $\log r$ の同心円環を R, その二分円を γ とするとき, γ の R に関する最小 Harnack 定数を $A_1(r)$ とすれば, R と γ は標準形で

$$\begin{cases} R = \left\{ \dfrac{1}{\sqrt{r}} < |z| < \sqrt{r} \right\}, \qquad \gamma = \{|z| = 1\} \\ \max_{\gamma} u \leqq A_1(r) \min_{\gamma} u \quad (u \in h(R)^+) \end{cases} \tag{4.2.1}$$

となる. r と共に R は増加し $h(R)^+$ は減少, 従って $r \mapsto A_1(r)$ は減少函数である.

4.3. 円周平均. 円環 $R=\{a<|z|<b\}$ 上の調和函数 $u\in h(R)$ の研究に於いて, R の回転不変性に基づく**平均評価の方法**と呼ばれる手法が初等的ながら場合によっては有力である. $u\in h(R)$ に対して

$$u^*(w)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(we^{i\theta})\,d\theta \tag{4.3.1}$$

を u の**同心円周平均**又は単に**平均**と言う. $w=|w|e^{it}$ とすると, $\theta+t=\varphi$ として, 又 $\varphi\mapsto u^*(|w|e^{i\varphi}):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は周期 2π の連続函数故

$$u^*(w)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(|w|e^{i(\theta+t)})\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_t^{2\pi+t}u(|w|e^{i\varphi})\,d\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(|w|e^{i\varphi})d\varphi=u^*(|w|),$$

即ち, u^* は $u^*(w)=u^*(|w|)$ となる所謂半径函数 (radial function) である.

$$\Delta_w u^*(w)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\Delta u)(we^{i\theta})d\theta=0$$

だから $u^*\in h(R)$ である. そこで更に R 上 u を有界調和函数とすると, Fatou の定理により $[0,2\pi]$ 上殆んどすべての $\theta\in[0,2\pi]$ で

$$u(ae^{i\theta})=\lim_{r\downarrow a}u(re^{i\theta}),\qquad u(be^{i\theta})=\lim_{r\uparrow b}u(re^{i\theta})$$

が存在するので, この境界値を使って $u^*(r)$ を (a,b) を超えて $[a,b]$ 全体まで

$$u^*(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})d\theta$$

により定義を拡げることが出来る. Lebesgue の収束定理によれば

$$u^*(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(ae^{i\theta})d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\lim_{r\downarrow a}u(re^{i\theta}))d\theta$$

$$=\lim_{r\downarrow a}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})d\theta=\lim_{r\downarrow a}u^*(r)$$

となり, 全く同様にして $u^*(b)=\lim_{r\uparrow b}u^*(r)$ となる. 即ち, u^* は $[a,b]$ 上連続となる. 故に**有界**な $u\in h(R)$ に対し $u^*\in h(R)$ は, $[a,b]$ 上の次の 2 階常微分方程式の境界値問題の解 $u^*(r)$ として与えられる:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{d}{dr}u^*(r)\right)=0\quad(a<r<b)\\ u^*(a)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}u(ae^{i\theta})d\theta,\quad u^*(b)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}u(be^{i\theta})d\theta.\end{cases}\tag{4.3.2}$$

これを解くことは簡単で, 求める解 $u^*(w)$ は

$$u^*(w)=u^*(a)\frac{\log(|w|/b)}{\log(a/b)}+u^*(b)\frac{\log(|w|/a)}{\log(b/a)}\tag{4.3.3}$$

となる.

公式 (4.3.3) の応用を一つ与える. 円環 $R=\{a<|z|<b\}$ の二分円を $\gamma=\{|z|=\sqrt{ab}\}$ とし, ξ_w を $w\in\gamma$ を測定点とする R の調和測度とする. γ の R に関する最小 Harnack 定数 $\alpha(R,\gamma)$ を R の mudulus $\log\dfrac{b}{a}$ を使って

$$A_1=A_1(\frac{b}{a})$$

と記すことにしたのであった. そのとき $\partial R = C(a) \cup C(b)$ 上の線素を ds と記すと

$$\frac{d\xi_w}{ds}(z) \leqq \begin{cases} A_1 \dfrac{1}{4\pi a} & (z \in C(a)), \\ A_1 \dfrac{1}{4\pi b} & (z \in C(b)). \end{cases} \tag{4.3.4}$$

証明: 弧 $e \subset C(a)$ を任意にとり, その長さを $|e|$ とかく. $\partial R = C(a) \cup C(b)$ 上の弧 e の特性函数を χ_e とすると, $u = H^R_{\chi_e}$ とおけば, $\xi_w(e) = u(w)$ である. すると (4.3.3) より, e の角測度は $\dfrac{|e|}{2\pi a}$ だから

$$\begin{cases} u^*(a) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_e u(ae^{i\theta}) d\theta = \dfrac{|e|}{2\pi a}, \quad u^*(b) = 0 \\ u^*(z) = u^*(a) \dfrac{\log(|z|/b)}{\log(b/a)} = \dfrac{|e|}{2\pi a} \dfrac{\log(|z|/b)}{\log(a/b)} \end{cases}$$

となる. それ故 $z \in \gamma$ ならば $|z| = \sqrt{ab}$ であって

$$u^*(z) = \frac{|e|}{2\pi a} \frac{\log(\sqrt{ab}/b)}{\log(a/b)} = \frac{|e|}{2\pi a} \cdot \frac{1}{2} = \frac{|e|}{4\pi a}$$

である. (4.2.1) によれば $z \in \gamma$ に対し $u(z) \geqq \min_\gamma u \geqq A_1^{-1} \max_\gamma u$ だから

$$\frac{|e|}{4\pi a} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(ze^{i\theta}) d\theta \geqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(A_1^{-1} \max_\gamma u \right) d\theta = A_1^{-1} \max_\gamma u,$$

即ち, $\xi_w(e) = u(w) \leqq \max_\gamma u \leqq A_1 \dfrac{|e|}{4\pi a}$ である. よって

$$\frac{\xi_w(e)}{|e|} \leqq A_1 \frac{1}{4\pi a}$$

となるが, 特に, 任意の $z \in C(a)$ をとり, $z \in e$ のままで $|e| \to 0$ とすると, (4.1.4) より (4.3.4) の第 1 の不等式が出る. $e \subset C(b)$ にとったときも, 同様にして (4.3.4) の第 2 の不等式が出るので, 証明が終る. □

領域 $R \subset \mathbb{C}$ に関する完閉部分集合 $\gamma \subset R$ の最小 Harnack 定数 $\alpha(R, \gamma)$ を調べるに際して, R が円環 $\{a < |z| < b\}$ で γ がその二分円 $\{|z| = \sqrt{ab}\}$ の場合の $\alpha(R, \gamma) = A_1 \left(\dfrac{b}{a} \right) = A_1 \left(e^{\operatorname{mod} R} \right)$ が扱い易いことを 4.2 で見た. 一つには円環の回転不変性から円周平均法の適用の好例だからであった. 更により単純な例は R が円板の場合である. 以下しばらく R は開円板とする:

$$R = \{|z| < a\} \quad (a > 0).$$

このときすべての $u \in h(R)$ に対して **Gauss の平均値の定理**が成立する:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta = u(0) \quad (0 \leqq r < a).$$

更に $u \in h(R)$ が R 上有界とすると, Fatou の定理により殆んどすべての $ae^{i\theta} \in C(a) = \partial R$ に対して u の境界値函数 $u(ae^{i\theta}) = \lim_{r \nearrow a} u(re^{i\theta})$ が定義され, その同心円平均 u^* は Gauss の定理其の儘で

$$u^*(r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta = u(0) \quad (0 \leqq r \leqq a) \tag{4.3.5}$$

となる. つまり上の $u^*(r) = u(0)$ $(0 \leqq r \leqq a)$ は $u \in h(r)$ の円周平均の計算結果で, それがとりもなおさず Gauss の定理自身であるが, 敢えて Gauss の定理を経由しないで, 直接 (4.3.5) を導いてみよう, と言うか, Gauss の定理を平均法で証明しよう.

(4.3.5) の証明: 円環の場合と同様に u^* は $[0, a]$ 上の次の 2 階常微分方程式の境界値問題の解である:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r \frac{d}{dr} u^*(r) \right) = 0: \quad u^*(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(ae^{i\theta}) d\theta, \quad u^*(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(0) d\theta = u(0).$$

この方程式の一般解は $u^*(r) = c_1 \log r + c_2$ (c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$) である. 境界条件の一つの $u^*(0) = u(0)$ より $u^*(0) = c_1(-\infty) + c_2 = u(0)$ により $c_1 = 0$ かつ $c_2 = u(0)$ だから $u^*(r) = u(0)$, 即ち (4.3.5) が導出出来た. □

次に R が円環のときの R の調和測度に関する評価不等式 (4.3.4) の R が円板 $\{|z| < a\}$ $(a > 0)$ になった場合の対応物を述べる. $R = \{|z| < a\}$ $(a > 0)$, 従って, $\partial R = C(a)$, の場合, ξ を円板 R の測定点 $z = 0$ の調和測度とする. $\partial R = C(a)$ 上の線素を ds とするとき, 等式

(4.3.6) $$\frac{d\xi}{ds}(z) = \frac{1}{2\pi a} \quad (z \in C(a))$$

が成り立つ.

(4.3.6) の證明: $e \subset C(a)$ を長さ $|e|$ の任意の弧とする. χ_e は $\partial R = C(a)$ 上の e の特性函数とするとき $u := H^R_{\chi_e}$ とおけば, $\xi(e) = u(0)$ であるが, $u^*(a) = u(0)$ 故, 或る $0 \leqq t \leqq 2\pi$ に対して, e は ae^{it} を始点, $ae^{i(t+|e|/a)}$ を終点とする弧であるから $\theta \mapsto u(ae^{i\theta})$ は $[0, 2\pi]$ に於いて $[t, t+|e|/a]$ 上では 1, $[0, 2\pi] \setminus [t, t+|e|/a]$ 上では 0 だから

$$u^*(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(ae^{i\theta})d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_t^{t+|e|/a} 1 d\theta = \frac{|e|}{2\pi a}$$

である. なので

(4.3.7) $$\xi(e) = \frac{|e|}{2\pi a}$$

が得られる. 特に $z \in C(a)$ を任意にとるとき, $z \in e \subset C(a)$ である弧 e をとり $|e| \searrow 0$ とするならば $\dfrac{\xi(e)}{|e|} = \dfrac{1}{2\pi a}$ から (4.3.6) が出る. □

勿論, 円板 R の場合で上述した所, 即ち Gauss の平均値の定理 (4.3.5), 円弧の調和測度値 (4.3.7), 調和測度の密度公式 (4.3.6) 等々のすべては, $h(R)$ の各元の Poisson 積分表示から直ちに従う所であるが, 又そうすることが最も正統的であること論を待たないが, しかし場合によっては上でとった平均値評価法の方がずっと手軽で分かり易く本質に迫っているとも思える点も理解されよう.

4.4. 環型領域の調和測度. 平面領域 $W \subset \mathbb{C}$ の境界 ∂W の一成分が長さ有限の Jordan 曲線 Γ で, Γ の内部を (Γ) と記すとき, $W \subset (\Gamma)$ となるならば, W は Γ を**外境界**とする**環型領域**と呼ぶことにする. このとき $(\partial W) \backslash \Gamma$ は空でも空でなくてもどちらでも構わないとする. W の調和測度を ω とし Γ の線素を ds とするとき, Γ 上の ω の密度 $d\omega/ds$ を研究する.

そこで以下では上の W を次の如く具体化する. 先ず 2 数 $0 < b < a < \infty$ を固定し次いで閉円板 $\{|z| \leqq b\}$ 内の完閉集合 F で, $\{|z| < a\} \backslash F$ が連結でかつ原点 $z = 0$ を含むものとする. そのとき

(4.4.1) $$R := \{|z| < a\} \backslash F$$

を $C(a) = \{|z| = a\}$ を R の外境界とする環型領域と考える (図 5). このとき $\partial R \backslash C(a) = \partial F$ である. そして R の測定点 $z = 0$ の調和測度を μ とする.

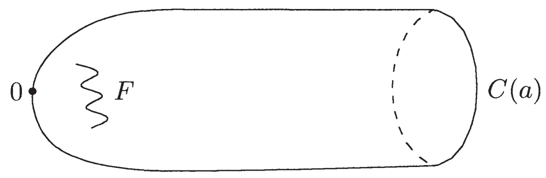

図 5

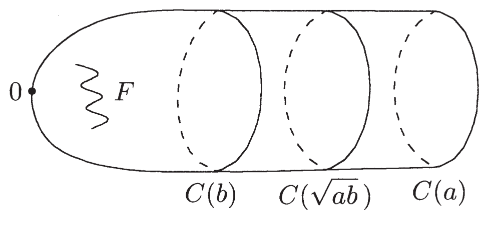

図 6

この μ を調べる目的で, R の一部分である円環 $\{b < |z| < a\}$ (図 6) に関するその二分円 $C(\sqrt{ab}) = \{|z| = \sqrt{ab}\}$ の最小 Harnack 定数を $A_1 = A_1\left(\dfrac{a}{b}\right)$ と (4.2.1) で記したが, それを使って新定数

(4.4.2) $$A = A\left(\frac{a}{b}\right) = 2\left(A_1\left(\frac{a}{b}\right)\right)^2$$

を導入すると, 次の密度評価不等式が成立する:

$$\max_{z\in C(a)}\frac{ds}{d\mu}(z) \leqq A\min_{z\in C(a)}\frac{ds}{d\mu}(z) \leqq A\frac{2\pi a}{\mu(C(a))}, \tag{4.4.3}$$

但し $C(a)$ 上の線素を ds と記す.

(4.4.3) の證明: 外境界 $C(a)$ の環型領域 $R=\{|z|<a\}\backslash F$ の外境界 $C(a)$ 以外の残りの R の境界部分を Λ と記す: $\Lambda := (\partial R)\backslash C(a) = \partial F$, 即ち $\partial R = C(a)\cup\Lambda$ である. e を長さ $|e|$ の $C(a)$ の部分小弧とする: $e\subset C(a)$. ∂R 上の $e\subset\partial R = C(a)\cup\Lambda$ の特性函数を χ_e とし, $u_e := H^R_{\chi_e}\in h(R)$ とおくならば, R の測定点 $z=0$ の調和測度 μ の定義より

$$\mu(e) = u_e(0) = H^R_{\chi_e}(0) \tag{4.4.4}$$

である. 外境界 $C(a)$ と残りの内境界 $\Lambda=\partial F$ で囲まれた環型領域 R から出発して, 先ず同心円環 $R_1 := \{b<|z|<a\}$ は R の内外境界を分離する R の部分領域, 次いで開円板 $R_2 := \{|z|<a\}$ は R に F を付け加えたもの, 即ち R の穴 F を埋めて円 $\{|z|<a\}$ に戻したものである. よって

$$R_1\subset R\subset R_2 \tag{4.4.5}$$

である. 三者共 $C(a)$ を外境界とする環型領域で, $\partial R_1\backslash C(a) = C(b)$, $\partial R\backslash C(a) = \Lambda = \partial F$, そして $\partial R_2\backslash C(a) = \emptyset$ である. 目的は $\mu|C(a)$ の研究であるが, これの R_1 と R_2 に於ける対応物は, R_1 及び R_2 の回転不変性により扱い易いので, その結果を包含関係 (4.4.5) に頼って R に於ける $\mu|C(a)$ に反映させようとするのが目論見である. そのための補助領域 R_1, R_2 の導入である. (4.4.4) に応じて, $e\subset C(a)$ の $\partial R_1 = C(a)\cup C(b)$ 上の特性函数を ${}_1\chi_e$, 同様に $e\subset C(a)$ の $\partial R_2 = C(a)$ 上の特性函数を ${}_2\chi_e$ とし, そして ${}_ju_e := H^{R_j}_{{}_j\chi_e}$ $(j=1,2)$ とおく. $u_e|\Lambda = 0$ $(\Lambda=\partial F)$ で ${}_2u_e|F>0$ なので $u_e|C(a) = {}_2u_e|C(a)$ より R 上 $u_e\leqq {}_2u_e$ である. ${}_1u_e|C(b)=0$ で $u_e|C(b)>0$ なので, R_1 上 ${}_1u_e\leqq u_e$ となる. よって (4.4.5) に応じて, R_1 上

$${}_1u_e\leqq u_e\leqq {}_2u_e \tag{4.4.6}$$

となる. $\{|z|\leqq b\}$ では ${}_1u_e=0$, F 上では $u_e=0$ と ${}_1u_e$ と u_e の定義域 を R_2 まで拡げておいたとすると (4.4.6) は最大領域である円板 R_2 に於いて成立するものと考えてよい. その上でこれら 3 函数の円周平均 $({}_1u_e)^*$, $(u_e)^*$, $({}_2u_e)^*$ を作ると (4.4.6) より $[0,a]$ 上で

$$({}_1u_e)^*(r)\leqq (u_e)^*(r)\leqq ({}_2u_e)^*(r) \qquad (0\leqq r\leqq a) \tag{4.4.7}$$

となる. $C(a)$ 上では ${}_1u_e = u_e = {}_2u_e = \chi_e$ であるから

$$({}_1u_e)^*(a) = (u_e)^*(a) = ({}_2u_e)^*(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\chi_e(ae^{i\theta})d\theta = \int_e\frac{d\theta}{2\pi} = \frac{|e|}{2\pi a}$$

である. $C(b)$ 上では, ${}_1u_e=0$ だから $({}_1u_e)^*(b)=0$ であるので, (4.3.3) より

$$({}_1u_e)^*(r) = \frac{\log(r/b)}{\log(a/b)}\cdot\frac{|e|}{2\pi a} \qquad (b\leqq r\leqq a) \tag{4.4.8}$$

となる. 又 (4.3.5) より

$$({}_2u_e)^*(r) = \frac{|e|}{2\pi a} \qquad (0\leqq r\leqq a) \tag{4.4.9}$$

である. 特に $r=\sqrt{ab}$ とすると. (4.4.8) より $({}_1u_e)^*(\sqrt{ab}) = |e|/4\pi a$, (4.4.9) より $({}_2u_e)^*(\sqrt{ab}) = |e|/2\pi a$ であるから (4.4.7) より

$$\frac{|e|}{4\pi a}\leqq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_e(\sqrt{ab}e^{i\theta})d\theta\leqq\frac{|e|}{2\pi a},$$

即ち, $R_1=\{b<|z|<a\}$ の二分円 $\gamma := C(\sqrt{ab})$ をとるとき

$$\frac{|e|}{4\pi a}\leqq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_e(we^{i\theta})d\theta\leqq\frac{|e|}{2\pi a} \qquad (w\in\gamma = C(\sqrt{ab})) \tag{4.4.10}$$

となる．ここで正数 $0<\varepsilon<2\pi a$ を任意にとるが，最終的には $\varepsilon\searrow 0$ とする積りである．そして全く任意の $C(a)$ の部分小弧 e_1 と e_2 を $|e_1|=|e_2|=\varepsilon$ となる様にとるならば (4.4.10) より

(4.4.11)
$$\frac{\varepsilon}{4\pi a}\leqq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_{e_j}(we^{i\theta})d\theta\leqq\frac{\varepsilon}{2\pi a}\quad(w\in\gamma,\ j=1,2)$$

となる．上の (4.4.11) の右側の不等式を $j=1$ で使い，$A_1=A_1\left(\frac{a}{b}\right)$ と略記して (4.2.1) に依ると

$$A_1^{-1}\max_\gamma u_{e_1}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(A_1^{-1}\max_\gamma u_{e_1}\right)d\theta\leqq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\min_\gamma u_{e_1}\right)d\theta$$

$$\leqq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_{e_1}(we^{i\theta}))d\theta\leqq\frac{\varepsilon}{2\pi a}\quad(w\in\gamma),$$

つまり，不等式

(4.4.12)
$$A_1^{-1}\max_\gamma u_{e_1}\leqq\frac{\varepsilon}{2\pi a}$$

が出る．今度は (4.4.11) の左側の不等式を $j=2$ で使い，又 (4.2.1) によれば

$$\frac{\varepsilon}{4\pi a}\leqq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_{e_2}(we^{i\theta})d\theta\leqq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\max_\gamma u_{e_2}\right)d\theta$$

$$\leqq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(A_1\min_\gamma u_{e_2}\right)d\theta=A_1\min_\gamma u_{e_2}\quad(w\in\gamma),$$

つまり，(4.4.12) に並行的な不等式

(4.4.13)
$$\frac{\varepsilon}{2\pi a}\leqq 2A_1\min_\gamma u_{e_2}$$

が得られる．これら両不等式 (4.4.12) と (4.4.13) から

$$A_1^{-1}\max_\gamma u_{e_1}\leqq\frac{\varepsilon}{2\pi a}\leqq 2A_1\min_\gamma u_{e_2}$$

となる．新たな定数 $A\left(\frac{a}{b}\right):=2\left(\left(\frac{a}{b}\right)\right)^2$ を A と略記，即ち，$A=2A_1^2$ として上の不等式の中央項を消去することで

(4.4.14)
$$\max_\gamma u_{e_1}\leqq A\min_\gamma u_{e_2}\quad(|e_1|=|e_2|=\varepsilon\in[0,2\pi])$$

が導出される．最後に今一つの補助領域 $S:=\{|z|<\sqrt{ab}\}\backslash F$ を考える．これも $\gamma=C(\sqrt{ab})$ を外境界とする環型領域で内境界 $\Lambda=\partial F$ であり，即ち，$\partial S=\gamma\cup\Lambda$ である．u_{e_1} 及び u_{e_2} を S 上で較べるために，先ず (4.4.14) から

$$u_{e_1}|\gamma\leqq\max_\gamma u_{e_1}\leqq A\min_\gamma u_{e_2}\leqq Au_{e_2}|\gamma$$

であり，又 $u_{e_1}|\Lambda=u_{e_2}|\Lambda=0$ より $u_{e_1}|\Lambda\leqq Au_{e_2}|\Lambda$ だから，∂S 上 $u_{e_1}\leqq Au_{e_2}$ が分かる．よって最大値の原理によれば S 上 $u_{e_1}\leqq Au_{e_2}$ となり，$0\in S$ だから，特に $u_{e_1}(0)\leqq Au_{e_2}(0)$ であるので，(4.4.4) により

(4.4.15)
$$\mu(e_1)\leqq A\mu(e_2)\quad(e_1,\ e_2\subset C(a),\ |e_1|=|e_2|=\varepsilon\in(0,2\pi))$$

が結論出来る．そこで，任意の 2 点 z_1 と z_2 を $C(a)$ からとり，$C(a)$ の部分小弧 e_1 と e_2 を $z_j\in e_j$ $(j=1,2)$ で $|e_1|=|e_2|=\varepsilon\in(0,2\pi)$ となる様に任意にとれば上の (4.4.15) の両辺を ε で割ることにより

$$\frac{\mu(e_1)}{|e_1|}\leqq A\frac{\mu(e_2)}{|e_2|}$$

だから，$|e_1|=|e_2|=\varepsilon\searrow 0$ とすることで (4.1.4) で見た通り，$C(a)$ 上の線素を ds として

$$\frac{d\mu}{ds}(z_1)\leqq A\frac{d\mu}{ds}(z_2)\quad(z_1,\ z_2\in C(a))$$

が導かれる. $d\mu/ds$ は $C(a)$ 上解析的で $0 < d\mu/ds < \infty$ 故 $(d\mu/ds)\cdot(ds/d\mu) = 1$ より

$$\frac{ds}{d\mu}(z_2) \leqq A\frac{ds}{d\mu}(z_1) \quad (z_1,\ z_2 \in C(a))$$

となり (4.4.3) の左側の不等式は即座に従う. そして

$$\mu(C(a)) \min_{C(a)} \frac{ds}{d\mu} = \min_{C(a)} \frac{ds}{d\mu} \int_{C(a)} d\mu = \int_{C(a)} \left(\min_{C(a)} \frac{ds}{d\mu} \right) d\mu$$

$$\leqq \int_{C(a)} \frac{ds}{d\mu} d\mu = \int_{C(a)} ds = s(C(a)) = 2\pi a,$$

即ち, $\min\limits_{C(a)}(ds/d\mu) \leqq (2\pi a)/(\mu(C(a))$ だから (4.4.3) の右側の不等式も出る. □

5. 環状集合

5.1. 零集合族 $\mathcal{N}_\Phi$ と $\mathcal{E}_\Phi$. $\mathbb{C}$ の**局所 H^Φ 除去可能集合** $E \subset \mathbb{C}$ とは, 先ず E は $\mathbb{C}$ の閉集合で, 次いで任意の完閉集合 K をとったとき常に $E \cap K$ が H^Φ 除去可能集合 (§2.2 参照, この様な集合全体を $\mathcal{N}_\Phi$ と記したので, $E \cap K \in \mathcal{N}_\Phi$) となることであった. 元々 E が完閉なら即座に $E \in \mathcal{N}_\Phi$ だから, 定義自身はどうであれ, 実質かつ本質的には第 1 条件として要求した $E \subset \mathbb{C}$ が閉集合であることは, 自明性を排除して言うなら, $E \subset \mathbb{C}$ が非完閉な閉集合であることを要求したい所である. $\mathbb{C}$ の**局所 H^Φ 除去可能集合全体を $\mathcal{E}_\Phi$** と記すが, 諸定義間の滑らかな繋がりの見地からは, 一方では是非

$$\mathcal{N}_\Phi \subset \mathcal{E}_\Phi \tag{5.1.1}$$

は欲しい所であるので仕方ない第 1 条件であった. それ故 $E \in \mathcal{E}_\Phi$ に対して

$$E \in \mathcal{E}_\Phi \backslash \mathcal{N}_\Phi \ \Rightarrow\ E \text{ が非完閉 } \Leftrightarrow\ \infty \in \overline{E}^{\hat{\mathbb{C}}} \tag{5.1.2}$$

が一つの特徴的な $\mathcal{E}_\Phi$ の $\mathcal{N}_\Phi$ にない一面である, 勿論 ∞ は $\mathbb{C}$ の無限遠点で $\overline{E}^{\hat{\mathbb{C}}}$ は E の $\hat{\mathbb{C}} \cup \{\infty\}$ 内の閉包である. $E \in \mathcal{E}_\Phi$ は完全非連結である. だから序論でも触れた様に, $\mathbb{C}$ の Jordan 領域 Ω_j から成る近似 $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ で $E \cap \Omega_j = \emptyset$ $(j \in \mathbb{N})$ となるものがとれる. これより完閉集合 $E \cap \Omega_j$ と閉集合 $E \cap (\mathbb{C}\backslash\Omega_j)$ は正の距離をもって離れていることがわかり, これより再び $\mathbb{C}$ の Jordan 領域 Ω_j からなる近似 $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ で

$$(\overline{\Omega}_{2k}\backslash\Omega_{2k-1}) \cap E \neq \emptyset,\ (\Omega_{2k+1}\backslash\overline{\Omega}_{2k}) \cap E = \emptyset\ (k \in \mathbb{N}),\quad \Omega_1 \cap E = \emptyset \tag{5.1.3}$$

となるものがとれる.

$$B_n := \overline{\Omega}_{2n}\backslash\Omega_{2n-1},\quad E_n := E \cap (\overline{\Omega}_{2n}\backslash\Omega_{2n-1})\ \ (n \in \mathbb{N})$$

とおくと, B_n は内側と外側の二つの Jordan 曲線で囲まれた, 所謂環状領域 (annulus) で, 各 B_n が B_{n+1} の内境界の内部に含まれるという意味で, ∞ 方向へ入籠状になっている環状領域列 $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を形成し $B_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ となっている. 又各 E_n は完閉集合で $E_n \subset B_n$ かつ $E_n \in \mathcal{N}_\Phi$ である様な H^Φ 零集合列 $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ となって居り, 出発の $E \in \mathcal{E}_\Phi$ は

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \quad (E_n \subset B_n,\ E_n \in \mathcal{N}_\Phi\ (n \in \mathbb{N})) \tag{5.1.4}$$

という分解をもつ. 逆に入籠状になっている環状領域列 $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \infty$ と $E_n \subset B_n$ となる H^Φ 零集合列 $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \infty$ から (5.1.4) で E を定めたら $E \in \mathcal{E}_\Phi$ となる. 本論文の主題は $H^\Phi(\mathbb{C}\backslash E)$ が様々な所求の性質を満たす様な $E \in \mathcal{E}_\Phi$ の研究であるので, 特にその様な $E \in \mathcal{E}_\Phi$ の構成に際して, E の表示 (5.1.4) を利用して, 調べ易い又は構成し易い B_n を用い又扱い易い $E_n \subset B_n$ を求める方針は当然の戦法である. この点を本節では論じ, 二つの基本定理にまとめる. いずれも荷見守助 ([3]) の創始に基づくもので, 基本定理 I は原型のままなので引用にとどめ, 基本定理 II は原型を超える一般化を含むので, 完全な證明を与える.

5.2. $\mathcal{N}_\Phi$ 集合の存在定理. 本小節では, 指定した形状を持つ $\mathcal{N}_\Phi$ 集合の存在を論ずる, 先ず言葉の意味を説明する. e が円板とか正方形とか三角形とか等々であるとき e の幾何学的形状は円板とか正方形とか三角形とか等々であると言うのは普

通のことである．そこで $E \subset e$ であって調和容量 $c(\cdot)$ で測って $c(E) \doteqdot c(e)$ なら E の形状は (大体に於いて) e であると考えて, **E の形状は e** と言う．特に本小節では同心円環 $e = \{b \leqq |z| \leqq a\}$ $(0 < b < a)$ が我々の言う形状である場合を考える．この e に対し $\mathrm{mod}\, e = \log(a/b)$ を e の modulus と言い $0 < \mathrm{mod}\, e < \infty$ であるが $\mathrm{mod}\, e$ が 0 に近い程, 即ち $b < a$ の a が b に近い程 e の厚さはより薄いと言う．本小節で述べる基本定理 I を描写的に叙述するならば, **いくらでも好きなだけ十分薄い同心円環の形状を持つ $\mathcal{N}_\Phi$ 集合が存在する**，である．この主張を正確に述べるため背景を具体的に量的に与える．$\mathbb{R}^+$ 上の許容凸函数 Φ は強凸条件 (de la vallée Poussin 条件) と Δ_2 条件を満たすものをとる．正数 $0 < b < a < \infty$ を固定する．有限個の非極な完閉集合 F_j $(j = 1, \cdots, k)$ を穴あき開円板 $\{0 < |z| < b\}$ からとる．各 $\{0 < |z| < b\} \backslash F_j$ $(j = 1, \cdots, k)$ は連結で他の F_i $(i = 1, \cdots, k,\ i \neq j)$ をすべて含むものとする．そして $F := \cup_{j=1}^k F_j \subset \{|z| < b\}$ とおくとき原点 $z = 0 \in \{|z| < b\} \backslash F$ である．$E \subset \{|z| \geqq a\}$ を完全非連結な完閉集合とするとき, $z = 0$ を測定点とする, $\{|z| < a\} \backslash F$ の調和測度を μ, $\mathbb{C} \backslash (F \cup E)$ の調和測度を μ_E とする．通常の記号 $C(a) := \{|z| = a\}$ は 0 中心半径 a の円周の意味である．次の定理を基本定理 I とするが, これは $\mathcal{N}_\Phi$ 集合の基本存在定理と呼ぶべきもので, その本質も表現も共に Hasumi [3] に依るもので, 特に [4] には解説的で丁寧な詳しい證明が与えられて居るので本論文では再挙する必要も必然も一切無い．

定理 5.2.1 (基本定理 I)． **Φ は強凸及び Δ_2 の 2 条件を満たす $\mathbb{R}^+$ 上の許容凸函数とする．任意に正数 $\varepsilon > 0$ と $\delta > 1$ をあたえるとき, 次の 2 条件を満たす完閉集合 $E \in \mathcal{N}_\Phi$ が存在する:**

$$E \subset \{a \leqq |z| \leqq \delta a\} \quad (\text{厚さ } \log\delta \text{ の同心円環}); \tag{5.2.2}$$

$$\mu_E(E) < \mu(C(a)) < \mu_E(E) + \varepsilon. \tag{5.2.3}$$

注意 5.2.4. $\mathbb{C} \backslash F$ に関する $K \subset \{|z| \geqq a\}$ の測定点 $z = 0$ の調和容量を $c(K)$ と記すとき $\mu_E(E) = c(E)$, $\mu(C(a)) = c(C(a))$ (§3.1 参照) である．それ故 (5.2.2) と (5.2.3) より

$$\begin{aligned} c(E) &\leqq c(\{a \leqq |z| \leqq \delta a\}) = c(\{a \leqq |z|\}) = c(C(a)) \\ &= \mu(C(a)) < \mu_E(E) + \varepsilon = c(E) + \varepsilon \end{aligned}$$

である, 即ち $c(E) \leqq c(\{a \leqq |z| \leqq \delta a\}) < c(E) + \varepsilon$ となる．よって再び (5.2.2) と合せて, E は薄い円環の形状を持つ, と言うことである．

注意 5.2.5. 自明な等式群

$$\begin{cases} \mu(C(a)) + \mu(F) = 1 \\ \mu_E(E) + \mu_E(F) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu(F) = \displaystyle\sum_{j=1}^k \mu(F_j) \\ \mu_E(F) = \displaystyle\sum_{j=1}^k \mu_E(F_j) \end{cases} \tag{5.2.6}$$

の成立は調和測度の定義から直ちに従う．更に境界値の比較から

$$\mu_E(E) < \mu(C(a)), \quad \mu_E(F_j) > \mu(F_j) \quad (j = 1, \cdots, k), \quad \mu_E(F) > \mu(F) \tag{5.2.7}$$

がわかる．上の (5.2.6) より

$$\mu(C(a)) - \mu_E(E) = \mu_E(F) - \mu(F) = \sum_{j=1}^k (\mu_E(F_j) - \mu(F_j)) \tag{5.2.8}$$

となる．定理 5.2.1 に於いて E が主役でそれ故 (5.2.3) が肝心な所で, F は単に従の状況だから大切でないにしても, (5.2.7) と (5.2.8) によれば, E に関する情報 (5.2.3) と次の F に関する情報

$$\begin{cases} \mu(F_j) < \mu_E(F_j) < \mu(F_j) + \varepsilon \quad (j = 1, \cdots, k) \\ \mu(F) < \mu_E(F) < \mu(F) + \varepsilon \end{cases} \tag{5.2.9}$$

が互いに同値となって居ることがわかる．

5.3. 環状集合の基本存在定理. 局所 $\mathcal{N}_\Phi$ 集合 $E \in \mathcal{E}_\Phi$ の内次の様な特殊な形のものを考える. これは Hasumi [4] により導入され「環状集合」と名付けられたものであるが, 本論文では, この原型に我々の言う「指定流量」の概念を加えて改変を施した原型の一般化であるが名前は又旧名「環状集合」を踏襲した所のものを考えるので [4] と重複する部分が多々あるが, 一貫性のため, 全体を通して環状集合の存在証明も含め詳論する. ここから我々の言う所の環状集合の定義を始める. 第一に

$$1 < \delta < \rho < \infty, \quad 0 < d < 1 \tag{5.3.1}$$

満たす 3 正数 δ, ρ, d と今一つの正数列 $(b_j)_{j\in\mathbb{Z}^+}$ ($\mathbb{Z}^+ = \{0\} \cup \mathbb{N}$) を先行的に与える. その上で, 正数列 $(a_j)_{j\in\mathbb{Z}^+}$ と各 a_j に拘る正数の列 $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$ と非極 $\mathcal{N}_\Phi$ 集合 E_j の列 $(E_j)_{j\in\mathbb{Z}^+}$ を定め以下の 4 条件を満たす様にする:

$$a_n \geqq \max\{n, b_n\}, \quad a_{n+1}/a_n \geqq \rho \quad (n \in \mathbb{Z}^+), \tag{5.3.2}$$

$$E_n \subset \{a_n \leqq |z| \leqq \delta a_n\} \quad (n \in \mathbb{Z}^+), \tag{5.3.3}$$

$$\lim_{a_n\to\infty} V_n^{-1} \cdot \log a_n = 0. \tag{5.3.4}$$

更に領域 $\mathbb{C} \setminus \cup_{n\in\mathbb{Z}^+} E_n$ 上の測定点 $z = 0$ の調和測度を m とするとき

$$d \leqq V_n m(E_n) \leqq 1 \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{5.3.5}$$

を満足するとする. このとき

$$E := \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} E_n \tag{5.3.6}$$

とおけば, $E \in \mathcal{E}_\Phi$ であるが, この E を, 無限遠点 ∞ に流入する**指定流量** $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の $\mathcal{N}_\Phi$ 集合列 $(E_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ のつくる $\boldsymbol{\mathcal{N}_\Phi}$ **環状集合**と呼び, 又各 E_n を E の**成分**と言う (図 7).

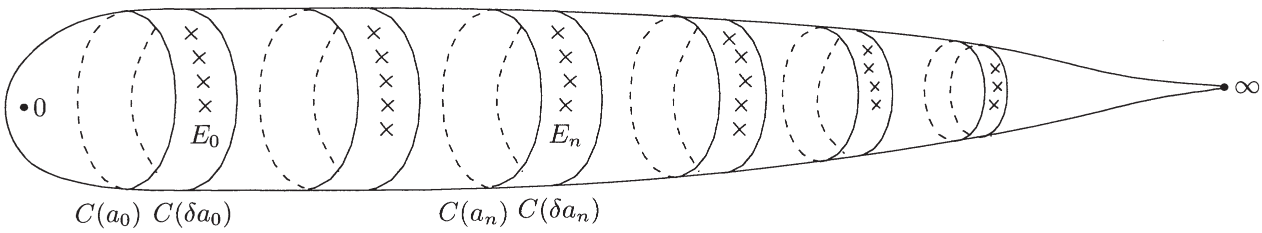

図 7

上で定義した様な $\mathcal{N}_\Phi$ 環状集合 $E = \cup_{n\in\mathbb{Z}^+} E_n$ を使って考えた $H^\Phi(\mathbb{C}\setminus E)$ を $A(\mathbb{C})$ の指定部分空間に一致又は何等かの意味で近いものにすることを試みるのであるが, そのときそれを決定する主となる要素は, E の指定流量のあり方である. それ故あらかじめ指定流量 $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を任意に定めた環状集合が存在するか否かが中心課題である. その意味で, 環状集合の存在定理と名付けられるべき次の定理を, 我々の論文で果す役割から, 前小節の基本定理 I と並んで, 基本定理 II とする:

定理 5.3.7 (基本定理 II). 強凸かつ $\boldsymbol{\Delta_2}$ の二条件を満たす $\mathbb{R}^+$ 上の許容凸函数 $\boldsymbol{\Phi}$ を任意に与える. 更に (5.3.1) を満たす正数 $\boldsymbol{\delta}$, $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{d}$ と正数列 $\boldsymbol{(b_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}}$ を任意に与える. 今一つ正数列 $\boldsymbol{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}}$ が決まった暁には (5.3.4) を満足する $\boldsymbol{(V_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ を任意に与える. そのとき (5.3.2), (5.3.3), (5.3.5) の三条件を満たすような正数列 $\boldsymbol{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}}$ と非極 $\boldsymbol{\mathcal{N}_\Phi}$ 集合列 $\boldsymbol{(E_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}}$ が定まって, それにより (5.3.6) で決まる $\boldsymbol{\mathcal{N}_\Phi}$ 環状集合 $\boldsymbol{E}$ が存在する.

證明: $0 < d < 1$ に対し単調減少数列 $(d_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ で d に収束するものをとる:

$$1 > d_0 > d_1 > d_2 > \cdots > d_n \searrow d > 0 \quad (n \to \infty).$$

各 $n \in \mathbb{Z}^+$ に対して 2 領域

$$\mathbb{C} \setminus \Big(\bigcup_{j=0}^{n} E_j \Big) \quad 及び \quad \{|z| < a_{n+1}\} \setminus \Big(\bigcup_{j=0}^{n} E_j \Big)$$

の計測点 $z=0$ の調和測度を夫々 μ_n 及び ν_n と記す (図 8, 図 9).

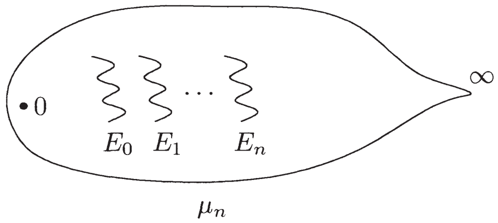

図 8

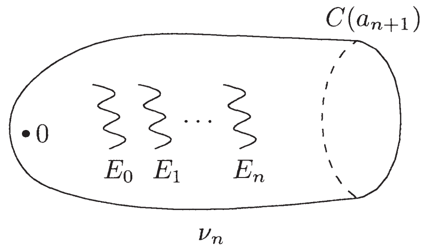

図 9

以下求める集合 E を帰納的に構成する. 任意の非負整数 $n \in \mathbb{Z}^+$ に対して, 有限数列 $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ と非極な $\mathcal{N}_\Phi$ 集合 E_k の有限列 $(E_0, E_1, \cdots, E_n)$ が次の

$$\langle \text{条件}\, n \rangle : \begin{cases} a_k \geqq \max\{k, b_k\} \quad (k = 0, 1, \cdots, n) \\ a_{k+1}/a_k \geqq \rho \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1) \\ d_n \alpha_k \leqq \mu_n(E_k) \leqq \alpha_k, \quad \text{但し} \;\; \alpha_k := V_k^{-1} \; (k = 1, \cdots, n) \end{cases}$$

を満足する様な数列 $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ と非極 $\mathcal{N}_\phi$ 集合列 $(E_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ が存在することを示す. この構成を帰納的に行うのである. 最初 $a_0 \geqq \max\{0, b_0\} > 0$ である a_0 をとる. 基本定理 I(定理 5.2.1) により非極 $\mathcal{N}_\Phi$ 集合 E_0 を $E_0 \subset \{a_0 \leqq |z| \leqq \delta a_0\}$ となる様にとることが出来る. つまり $\langle$条件 0$\rangle$ については構成終了. そこで, $n \in \mathbb{Z}^+$ に対し $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ と $(E_0, E_1, \cdots, E_n)$ が $\langle$条件 $n\rangle$ を満たすとき, 更に正数 a_{n+1} と非極 $\mathcal{N}_\Phi$ 集合 E_{n+1} を選んで $\langle$条件 $n+1\rangle$ を $(a_0, \cdots, a_n, a_{n+1})$ と $(E_0, \cdots, E_n, E_{n+1})$ が満たす様に出来ることを示す.

先ず a_{n+1} については

(5.3.8) $$a_{n+1} \geqq \max\{n+1, b_{n+1}\} \;\; \text{かつ} \;\; a_{n+1}/a_n \geqq \rho,$$

(5.3.9) $$d_{n+1} \alpha_k \leqq \nu_n(E_k) \leqq \alpha_k \quad (k = 1, \cdots, n),$$

(5.3.10) $$\nu_n(C(a_{n+1})) > \alpha_{n+1} \quad (= V_{n+1}^{-1})$$

の 3 条件が満たされる様に a_{n+1} を十分大きくとるのである. 事実 (5.3.8) を満たさせることに何の努力もいらない. (5.3.9) については, 帰納法の仮定である $<$ 条件 n $>$ の第 3 式

(5.3.11) $$d_n \alpha_k \leqq \mu_n(E_k) \leqq \alpha_k \quad (k = 1, \cdots, n)$$

を使う. 各 $k = 1, \cdots, n$ について領域 $\hat{\mathbb{C}} \backslash (\cup_{j=0}^n E_j)$ (又は $\{|z| < a_{n+1}\} \backslash (\cup_{j=0}^n E_j)$) 上の調和函数で, $\cup_{j \neq k}^{\{0,1,\cdots,n\}} E_j$ に於ける境界値を 0, E_k に於ける境界値を 1 (又は $(\cup_{j \neq k}^{\{0,1,\cdots,n\}} E_j) \cup C(a_{n+1})$ に於ける境界値を 0, E_k に於ける境界値を 1) とするものを u_k (又は v_k) とする. 境界値の比較により一般化列 $(v_k)_{a_{n+1} \uparrow \infty}$ は単調増加で $0 < v_k \leqq 1$ だから, $a_{n+1} \uparrow \infty$ としたときのこの列の極限を v とすると, これは $\mathbb{C} \backslash (\cup_{j=0}^n E_j)$ 上調和で $0 < v_k \leqq 1$ だから, $z = \infty$ は除去可能特異点故, $\hat{\mathbb{C}} \backslash (\cup_{j=0}^n E_j)$ 上 v は調和で, その境界値は u_k と一致するから, $v = u_k$ となる. だから $v_k \nearrow u_k$ $(a_{n+1} \nearrow \infty)$, 特に $v_k(0) \nearrow u_k(0)$ $(a_{n+1} \nearrow \infty)$ となる. $u_k(0) = \mu_n(E_k)$, $v_k(0) = \nu_n(E_k)$ に注意すれば, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し或る正数 $a(\varepsilon)$ が定まって, $a_{n+1} \geqq a(\varepsilon)$ なら

(5.3.12) $$0 < \mu_n(E_k) - \nu_n(E_k) < \varepsilon \quad (k = 1, \cdots, n)$$

と出来る. そこで $\varepsilon := (d_n - d_{n+1}) \min\{\alpha_1, \cdots \alpha_n\}$ にとると (5.3.11) により先ず

$$\nu_n(E_k) \leqq \mu_n(E_k) \leqq \alpha_k \quad (k = 1, \cdots, n)$$

であり, 又 $\varepsilon \leqq (d_n - d_{n+1}) \alpha_k$ より, 又 (5.3.11) を使ってその上 (5.3.12) より

$$d_{n+1} \alpha_k \leqq d_n \alpha_k - \varepsilon \leqq \mu_n(E_k) - \varepsilon \leqq \nu_n(E_k) \leqq \alpha_k \quad (k = 1, \cdots, n)$$

となり, これは即ち (5.3.9) である. こうして a_{n+1} を大きくとって (5.3.9) も満たされる. 最後の (5.3.10) も同様で, a_{n+1} が十分大きくなると満たされることを見る (図 10). 小さくてもとにかく $a_{n+1} > \rho a_n$ とする. 領域 $\{|z| < a_{n+1}\}\backslash(\cup_{j=0}^{n} E_j)$ 上の調和函数 u で次の境界条件

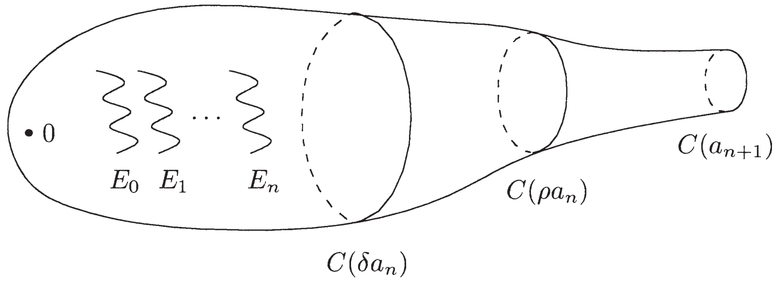

図 10

$$u| \cup_{j=0}^{n} E_j = 0, \quad u|C(a_{n+1}) = 1$$

を満たすものをとると, $u(0) = \nu_n(C(a_{n+1}))$ である. 領域 $S := \{\delta a_n < |z| < a_{n+1}\}$ 上の調和函数 v で次の境界条件

$$v|C(\delta a_n) = 0, \quad v|C(a_{n+1}) = 1$$

を満たすものをとるとき, $z \in \overline{S}$ に対して, ∂S 上の u と v の境界値の比較により

$$u(z) \geqq v(z) = \frac{\log|z| - \log \delta a_n}{\log a_{n+1} - \log \delta a_n}$$

となる. 領域 $\{|z| < \rho a_n\}\backslash(\cup_{j=0}^{n} E_j)$ 上の計測点 $z = 0$ の調和測度を η とすると

$$u(0) = \int_{C(\rho a_n)} u(z) d\eta(z)$$

である. だから

$$\nu_n(C(a_{n+1})) = u(0) = \int_{C(\rho a_n)} u(z) d\eta(z) \geqq \int_{C(\rho a_n)} v(z) d\eta(z)$$
$$= \int_{C(\rho a_n)} \frac{\log|z| - \log \delta a_n}{\log a_{n+1} - \log \delta a_n} d\eta(z) = \frac{\log \rho a_n - \log \delta a_n}{\log a_{n+1} - \log \delta a_n} \cdot \eta(C(\rho a_n))$$

となる. それ故

$$\nu_n(C(a_{n+1})) \cdot \log a_{n+1} \geqq \frac{\log(\rho/\delta)}{1 - (\log \delta a_n)/(\log a_{n+1})} \cdot \eta(C(\rho a_n))$$

だから

$$\liminf_{a_{n+1} \nearrow \infty} \nu_n(C(a_{n+1})) \cdot \log a_{n+1} \geqq \log(\rho/\delta) \cdot \eta(C(\rho a_n)) > 0$$

となる. 故に

$$\liminf_{a_{n+1} \nearrow \infty} \frac{\nu_n(C(a_{n+1}))}{V_{n+1}^{-1}} = \liminf_{a_{n+1} \nearrow \infty} \frac{\nu_n(C(a_{n+1})) \cdot \log a_{n+1}}{V_{n+1}^{-1} \cdot \log a_{n+1}} \geqq \frac{\log(\rho/\delta) \cdot \eta(C(\rho a_n))}{+0} = \infty.$$

よって或る正数 $a(1)$ があって $a_{n+1} \geqq a(1)$ ならば $\nu_n(C(a_{n+1}))/V_{n+1}^{-1} > 1$ となる. つまり a_{n+1} が十分大ならば (5.3.10) が成立する. こうして (5.3.8), (5.3.9), (5.3.10) の 3 条件を満たす様な a_{n+1} を選ぶことが出来, これを固定する.

次に E_{n+1} の選出である. 再び $\mathcal{N}_\Phi$ 集合の存在定理である基本定理 I(定理 5.2.1) を使う. それに依れば, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し非極集合 $X \subset \{a_{n+1} \leqq |z| \leqq \delta a_{n+1}\}$ で, 領域 $\mathbb{C}\backslash(\cup_{j=0}^{n} E_j) \cup X$ の測定点 $z = 0$ の調和測度を μ_X と記せば,

$$\nu_n(C(a_{n+1})) - \varepsilon < \mu_X(X) \leqq \nu_n(C(a_{n+1}))$$

となるものがとれる. 特に $\varepsilon = \nu_n(C(a_{n+1})) - V_{n+1}^{-1}$ にとってあるとして

$$V_{n+1}^{-1} < \mu_X(X) \leqq \nu_n(C(a_{n+1}))$$

が成り立つものとして良い. そこで $\{|z| \geqq a_{n+1}\}$ の完閉部分集合 Y に対してその調和容量 $c(Y)$ (§3 参照) を

$$c(Y) := \mu_Y(Y)$$

で与える. すると $c(X) = \mu_X(X) \in (V_{n+1}^{-1}, \nu_n(C(a_{n+1}))]$ であるから, 調和容量の中間値の定理 (定理 3.3.1): $\{c(Y) : Y \subset X\} = [0, c(X)]$ により, $c(X) = \mu_X(X) \geqq V_{n+1}^{-1}$ なので X の完閉部分集合 E_{n+1} で

$$c(E_{n+1}) \in [d_{n+1}V_{n+1}^{-1}, V_{n+1}^{-1}] \subset [0, c(X)]$$

となるものがとれる. $X \subset \{a_{n+1} \leqq |z| \leqq \delta a_{n+1}\}$ は $\mathcal{N}_\Phi$ 集合故, 結局 $E_{n+1} \subset \{a_{n+1} \leqq |z| \leqq \delta a_{n+1}\}$ は非極 $\mathcal{N}_\Phi$ 集合で, $\mu_{E_{n+1}}(E_{n+1}) = \mu_{n+1}(E_{n+1})$ だから

(5.3.13) $$d_{n+1}V_{n+1}^{-1} \leqq \mu_{n+1}(E_{n+1}) \leqq V_{n+1}^{-1}$$

となる. μ_n, μ_{n+1}, ν_n の定義により

$$\nu_n(E_k) \leqq \mu_{n+1}(E_k) \leqq \mu_n(E_k) \quad (k = 1, \cdots, n)$$

であるから, $<$ 条件 $n>$ の最後の不等式と (5.3.1) と (5.3.13) と上記不等式により

$$d_{n+1}V_k^{-1} \leqq \mu_{n+1}(E_k) \leqq V_k^{-1} \quad (k = 1, \cdots, n+1)$$

となる. だから $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ に上に選んだ a_{n+1} を追加した $(a_0, a_1, \cdots, a_{n+1})$ と, 今選んだ E_{n+1} を $(E_0, E_1, \cdots, E_n)$ に追加した $(E_0, E_1, \cdots, E_{n+1})$ は $<$ 条件 $n+1>$ を満たすことがわかる. かくて, すべての $<$ 条件 $n>$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$ を満足する正数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ と非極 $\mathcal{N}_\Phi$ 集合列 $(E_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ が構成出来た.

そこで任意の $k \in \mathbb{N}$ を固定したとき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ を $n > k$ にとるとき

$$d_n V_k^{-1} \leqq \mu_n(E_k) \leqq V_k^{-1}$$

であるから, 容易に分かる様に $\mu_n(E_k) \searrow m(E_k)$ $(n \to \infty)$ で, 又 $d_n \searrow d$ $(n \to \infty)$ だから, 上式で $n \to \infty$ として $dV_k^{-1} \leqq m(E_k) \leqq V_k^{-1}$, 又は

$$d \leqq V_k\, m(E_k) \leqq 1 \quad (k \in \mathbb{N})$$

となる. これは (5.3.5) の成立に他ならない. よって (5.3.6) で定める E が我々の所求の流量 $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$ の $\mathcal{N}_\Phi$ 環状集合である. □

6. 多項式の Hardy-Orlicz 空間

本節に於いては本論文の主要定理である定理 1.4.2 の證明を与えることを第一の目標とする. 但しこの定理を特別の場合として含む形に一般化されその Hardy-Orlicz 空間版へと定式化されたものを述べて, それを證明する. そうする理由は, 定理 1.4.2 の本質的部分が Hardy 空間に於けるより Hardy-Orlicz 空間に於いて, より顕在的に見てとれるからである. 定理 1.4.2 の限界を示す定理 1.4.4 の證明は, しかしながら, 直接この形のまま Hardy 空間で与える.

6.1. (Φ, ν) 条件. Φ を $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ 上の強凸である許容凸函数とし, 又 ν を非負整数, $\nu \in \mathbb{Z}^+ = \{0\} \cup \mathbb{N}$, とする. そのとき別の $\mathbb{R}^+$ 上の許容凸函数 Ψ が $\mathbb{R}^+$ 上 **(Φ, ν) 条件**を満たすとは, 第一に

(6.1.1) $$\Psi \prec \Phi$$

であり, 次いで, 任意の $s \in \mathbb{R}^+$ に対して[5)] Ψ の Φ に関する極限挙動

5) $s < 0$ なら $\Phi(t-s) = \Phi(t+|s|) \geqq \Phi(t-|s|)$ により, $\Psi(\nu t)/\Phi(t-s) \leqq \Psi(\nu t)/\Phi(t-|s|) \to \infty$ だから条件 (6.1.2) を $s \in \mathbb{R}^+$ に対して要求することと, $s \in \mathbb{R}$ に対して要求することは同値である.

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\Psi(\nu t)}{\Phi(t-s)} = 0 \tag{6.1.2}$$

及び同種の極限挙動

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\Psi((\nu+1)t)}{\Phi(t)} > 0 \tag{6.1.3}$$

の計 3 条件を満たすことである.

(Φ,ν) 条件を定める 3 条件について一言する. $\nu > 0$ の場合には, $\nu \in \mathbb{N}$ だから $\Psi(\nu t) \geqq \Psi(t)$ $(t \in \mathbb{R}^+)$ であり, (6.1.2) により $\lim_{t\to\infty} \Psi(t)/\Phi(t) = 0$ であるから条件 (6.1.1) が導かれる. つまり $\nu > 0$ の場合には (Φ,ν) 条件は 2 条件 (6.1.2) と (6.1.3) のみで定まり (6.1.1) は不要である. $\nu = 0$ の場合には (6.1.2) は自動的に満たされ何の条件も与えない. しかし条件 (6.1.3) は $\lim_{t\to\infty} \Psi(t)/\Phi(t) > 0$ で, これから $\Psi \succ \Phi$ が結論される. これと (6.1.1): $\Psi \prec \Phi$ を合せて $\Psi \sim \Phi$ である. こうして

$$\begin{cases} \Psi \text{ が } (\Phi,0) \text{ 条件 } (\nu=0) \text{ を満たす } \Leftrightarrow \Psi \sim \Phi; \\ \Psi \text{ が } (\Phi,\nu) \text{ 条件 } (\nu>0) \text{ を満たす } \Leftrightarrow \text{(6.1.2) と (6.1.3) の成立.} \end{cases}$$

この様な形に (Φ,ν) 条件を理解できる. このとき次の主張が成立する:

定理6.1.4. **$\mathbb{R}^+$ 上の強凸かつ Δ_2 条件を満たす許容凸函数 Φ と Ψ が与えられているとする. 非負整数 $\nu \in \mathbb{Z}^+ = \{0\} \cup \mathbb{N}$ に対して, Ψ が (Φ,ν) 条件を満たすとする. そのとき, 各成分 E_n $(n \in \mathbb{N})$ が非極な $\mathcal{N}_\Psi$ 集合で, 従って $\mathcal{N}_\Phi$ 集合でもある, 無限遠点に流入する (或いは吸い込まれる) 環状集合 $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{E}_\Psi$ (従って $E \in \mathcal{E}_\Phi$) であって**

$$\begin{cases} H^\Psi(\mathbb{C}\backslash E) = \{f \in A(C) : \deg f < \nu + 1\}; \\ H^\Phi(\mathbb{C}\backslash E) = \mathbb{C} \end{cases} \tag{6.1.5}$$

を成り立たせる様なものが存在する.

証明： 求める E の構成のために, 根源的定数 $1 < \delta < \rho < \infty$ と $0 < d < 1$, 及び次の如き正数列 $(b_j)_{j\in\mathbb{Z}^+}$ を固定する. 以下 $(b_j)_{j\in\mathbb{Z}^+}$ に要求する諸条件は各 b_j $(j \in \mathbb{N})$ は大きければ大きい程良いと言うものである. 決まりをつけるだけであるが $b_0 = 1$ にとる. $n \geqq 1$ に対しては, とにかく $b_n \geqq \max(\delta, n)$ は満たすとする. 更に本質的制約として

$$\Psi(\nu \log(\delta t)) \leqq \frac{1}{2^n}\Phi(\log\frac{t}{n}) \quad (t \geqq b_n) \tag{6.1.6}$$

となる様に十分大きく b_n をとる. これが可能な理由は仮定 (6.1.2) に依る, 即ち,

$$\tau := \log(\delta t), \quad \sigma = \log(\delta n)$$

とおくと, 変数 τ と t について, $0 < \tau \nearrow \infty$ と $1/\delta < t \nearrow \infty$ は

$$t \geqq b_n \geqq \max(\delta, n)$$

に於いて正しい. $\tau - \sigma = \log\dfrac{t}{n}$ で, $t \nearrow \infty$ なら $\tau \nearrow \infty$ 故, $s = \sigma \in \mathbb{R}$ に対する (6.1.2) により

$$\frac{\Psi(\nu \log(\delta t)}{\Phi(\log\frac{t}{n})} = \frac{\Psi(\nu\tau)}{\Phi(\tau-\sigma)} \to 0$$

となるので, 十分大きく b_n を選べば, $t \geqq b_n$ に対して

$$\frac{\Psi(\nu \log(\delta t)}{\Phi(\log\frac{t}{n})} \leqq \frac{1}{2^n}$$

となり, (6.1.6) が従う. 条件 (6.1.1): $\Psi \prec \Phi$, があるので, $H^\Psi \supset H^\Phi$ と $\mathcal{N}_\Psi \subset \mathcal{N}_\Phi$ に注意する.

先行的に定めた定数 $1 < \delta < \rho < \infty$ と $0 < d < 1$ 及び正数列 $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ に基づいて, 環状集合の基本存在定理, 特にその内の基本定理 II(定理 5.3.7), を使う. それにより正数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ 及びそれの定める正数列 $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 非極な $\mathcal{N}_\Psi$ (従って $\mathcal{N}_\Phi$) 集合列 $(E_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ を次の如くに定める:

$$a_n \geqq b_n, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geqq \rho \quad (n \in \mathbb{Z}^+), \tag{6.1.7}$$

(6.1.8) $$E_n \subset \{a_n \leqq |z| \leqq \delta a_n\} \quad (n \in \mathbb{Z}^+),$$

(6.1.9) $$V_n = \Phi(\log a_n) \quad (n \in \mathbb{N})^{6)};$$

更に領域 $\mathbb{C}\backslash \cup_{0\leqq n<\infty} E_n$ の計測点 $z=0$ の調和測度を m として

(6.1.10) $$d \leqq V_n m(E_n) \leqq 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

を満足する.[7] このとき

(6.1.11) $$E = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} E_n$$

が求める所の無限遠点に吸い込まれて行く指定流量 $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の $\mathcal{E}_\Psi$ (従って $\mathcal{E}_\Phi$) 集合である環状集合で, E の各成分 E_n は非極の $\mathcal{N}_\Psi$ (かつ $\mathcal{N}_\Phi$) 集合である. 以上の様に定めた環状集合 E は完全非連結なその各成分の可算和で, それらは無限遠点 ∞ へ流入して行くので, E 自身完全非連結であり, $\mathbb{C}\backslash E$ は原点 $z=0$ を含む領域となる. その定義域上で考える $H^\Psi(\mathbb{C}\backslash E)$ と $H^\Phi(\mathbb{C}\backslash E)$ について (6.1.5) を示すことが目的である. 最初 (6.1.5) の第 1 式

$(6.1.5)_1$ $$H^\Psi(\mathbb{C}\backslash E) = \{f \in A(\mathbb{C}) : \deg f < \nu + 1\}$$

を導出したい. その作業を 3 段階に分けて行う.

第 1 段: 或る $\kappa \in \mathbb{N}$ が定まって

(6.1.12) $$H^\Psi(\mathbb{C}\backslash E) \subset \{f \in A(\mathbb{C}) : \deg f \leqq \kappa\}$$

となることを見る, 即ち, 任意の $f \in H^\Psi(\mathbb{C}\backslash E)$ は高々 κ 次の多項式であることを示す. そのために $n \in \mathbb{N}$ を任意に固定して a_n に注目する. $1 < \delta < \rho < \infty$ だから

$$\left\{\frac{\delta}{\rho} a_n < |z| < a_n\right\} \subset \mathbb{C}\backslash E$$

である. $\sigma := (\delta/\rho)^{1/4}$ とおくと $0 < \sigma < 1$ で, 上に述べた所は

$$\{\sigma^4 a_n < |z| < a_n\} \subset \mathbb{C}\backslash E$$

である故, 勿論円環

$$\{\sigma^2 a_n < |z| < a_n\} \subset \mathbb{C}\backslash E$$

であり, その中心二分円は, 原点 0 中心半径 l の円周を $C(l)$ と記すと, $C(\sigma a_n) := \{|z| = \sigma a_n\}$ である. 円環 $\{\sigma^2 a_n < |z| < a_n\}$ の計測点 $w \in C(\sigma a_n)$ の調和測度を ξ_w とすると, (4.3.4) により

(6.1.13) $$\frac{d\xi_w}{ds}(z) \leqq \begin{cases} \dfrac{A_1}{4\pi a_n} & (z \in C(a_n)), \\ \dfrac{A_1}{4\pi\sigma^2 a_n} & (z \in C(\sigma^2 a_n)) \end{cases}$$

となる, 但し ds は $\partial\{\sigma^2 a_n < |z| < a_n\} = C(a_n) \cup C(\sigma^2 a_n)$ 上の線素で, $A_1 = A_1(\sigma^{-2})$ は modulus $\log\sigma^{-2}$ の円環 $\{\sigma^2 a_n < |z| < a_n\}$ の二分円 $C(\sigma a_n) = \{|z| = \sigma a_n\}$ の最小 Harnack 定数である ((4.2.1) 参照). さて $f \in H^\Psi(\mathbb{C}\backslash E)$ を任意にとり, それが (6.1.12) の右辺に入ることを示すのである. それで劣調和函数 $\Psi(\log^+|f|)$ の $\mathbb{C}\backslash E$ 上の調和優函数 u を一つ任意にとる. 目的 (6.1.12) からして, $f \equiv 0$ と $u \equiv 0$ の何れでもないとして良い. $E \in \mathcal{E}_\Psi$ により $H^\Psi(\mathbb{C}\backslash E) \subset A(\mathbb{C})$ だから, f は整関数で $\mathbb{C} : |z| < \infty$ 上整級数表示

$$f(z) = \sum_{0\leqq j<\infty} c_j z^j \quad (c_j \in \mathbb{C}\ (j \in Z^+))$$

を持つ. $f(z)$ は各円環 $\{\sigma^2 a_n < |z| < a_n\}$ 上有界正則だから, $\log^+|f(z)|$ は有界劣調和故, 任意の $w \in C(\sigma a_n)$ に対して

---

6) Φ の強凸性により $\lim_{n\to\infty} V_n^{-1}\log a_n = 0$ を満たすので, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は E の "指定流量" の要件を満たす.

7) $(a_n)_{\in\mathbb{Z}^+}$ は大きければいくらでも大きく好きなようにとることが出来ることを注意する.

$$\log^+|f(w)| \leqq \left(\int_{C(a_n)} + \int_{C(\sigma^2 a_n)}\right) \log^+|f(\zeta)|d\xi_w(\zeta) \tag{6.1.14}$$

となる．両辺の Ψ をとり, Jensen の不等式 ((2.1.4) 参照) を使うと

$$\Psi(\log^+|f(w)|) \leqq \left(\int_{C(a_n)} + \int_{C(\sigma^2 a_n)}\right) \Psi(\log^+|f(\zeta)|)d\xi_w(\zeta) \tag{6.1.15}$$

となる．上式 (6.1.15) の右辺の第 1 の積分を I_1, 第 2 の積分を I_2 とおき, それらを評価する．円環 $\{\sigma^2 a_n < |z| < a_n\}$ も $\{\sigma^4 a_n < |z| < \sigma^2 a_n\}$ も $\mathbb{C}\backslash E$ に含まれる．それで領域 $\{|z| < a_n\}\backslash E$ の計測点 $z=0$ の調和測度を η_1, 領域 $\{|z| < \sigma^2 a_n\}\backslash E$ の計測点 $z=0$ の調和測度を η_2 として, 密度評価不等式 (4.4.3) を使うと

$$\begin{cases} \dfrac{ds}{d\eta_1}(z) \leqq A\,\dfrac{2\pi a_n}{\eta_1(C(a_n))} & (z \in C(a_n)), \\ \dfrac{ds}{d\eta_2}(z) \leqq A\,\dfrac{2\pi\sigma^2 a_n}{\eta_2(C(\sigma^2 a_n))} & (z \in C(\sigma^2 a_n)) \end{cases} \tag{6.1.16}$$

となる．但し $A = A(\sigma^{-2}) := 2A_1^2 = 2(A_1(\sigma^{-2}))^2$ である ((4.4.2) 参照)．これと先程の (6.1.13) 及び $\Psi(\log^+|f|) \leqq u$ によれば

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{C(a_n)} \Psi(\log^+|f(\zeta)|d\xi_w(\zeta) \\ &= \int_{C(a_n)} \Psi(\log^+|f(\zeta)|\frac{d\xi_w}{ds}(\zeta)\cdot\frac{ds}{d\eta_1}(\zeta)d\eta_1(\zeta) \\ &\leqq \int_{C(a_n)} u(\zeta)\cdot\frac{A_1}{4\pi a_n}\cdot A\frac{2\pi a_n}{\eta_1(C(a_n))}d\eta_1(\zeta) \\ &= \frac{AA_1}{2\eta_1(C(a_n))}\int_{C(a_n)} u(\zeta)d\eta_1(\zeta) \leqq \frac{AA_1}{2\eta_1(C(a_n))}\,u(0) \end{aligned}$$

となる．上と同様並行的に計算評価を行って

$$I_2 = \int_{C(\sigma^2 a_n)} \Psi(\log^+|f(\zeta)|)d\xi_w(\zeta) \leqq \frac{AA_1}{2\eta_2(C(\sigma^2 a_n))}\,u(0)$$

が得られる．$\eta_1(C(a_n)) < \eta_2(C(\sigma^2 a_n))$ だから, $w \in C(\sigma a_n)$ に対して

$$\begin{aligned} &\Psi(\log^+|f(w)|) \leqq I_1 + I_2 \\ &\leqq \frac{1}{2}AA_1 u(0)\left(\frac{1}{\eta_1(C(a_n))} + \frac{1}{\eta_2(C(\sigma^2 a_n))}\right) \leqq \frac{AA_1}{\eta_1(C(a_n))}\,u(0) \end{aligned}$$

である．更に (6.1.8), (6.1.9), (6.1.10) と $\eta_1(C(a_n)) \geqq m(E_n)$ により

$$\eta_1(C(a_n)) \geqq m(E_m) \geqq \frac{d}{\Phi(\log a_n)}$$

であるので, 定数 C を

$$C := \frac{A(\sigma^{-2})A_1(\sigma^{-2})u(0)}{d}$$

で与えると, これから

$$\Psi(\log^+|f(w)|) \leqq C\Phi(\log a_n) \quad (w \in C(\sigma a_n))$$

となる．ここで (6.1.3) を使うと, 或る正数 $\alpha > 0$ と $\beta > 0$ があって

$$\frac{\Psi((\nu+1)t)}{\Phi(t)} \geqq \alpha \quad (t \geqq \beta)$$

と出来る．そこで或る $N\in\mathbb{N}$ があって $\log a_n \geqq \beta$ $(n\geqq N)$ となる．この様な n に対し上式で $t=\log a_n$ とおけば，$w\in C(\sigma a_n)$ について

$$\Psi(\log^+|f(w)|)\leqq C\Phi(\log a_n)=C\Phi(t)\leqq \frac{C}{\alpha}\Psi((\nu+1)t)=\frac{C}{\alpha}\Psi((\nu+1)\log a_n)$$

だから，最終的に

$$\frac{\Psi(\log^+|f(w)|)}{\Psi((\nu+1)\log a_n)}\leqq\frac{C}{\alpha}\quad(w\in C(\sigma a_n),\ n\geqq N) \tag{6.1.17}$$

が結論できる．

ここで上の (6.1.17) から先に進むために使う，上の Ψ は無論のこと，他の任意の $[0,\infty)$ 上の許容凸函数一般の持つ簡単な一般的な性質を述べる．Ψ の非定数性により

$$t_0:=\inf\{t\in[0,\infty):\ \Psi(t)>0\}\in[0,\infty)$$

が定まる．すると

$$\frac{t_1}{t_2}\leqq 1+\frac{\Psi(t_1)}{\Psi(t_2)}\quad(t_1\geqq 0,\ t_2>t_0) \tag{6.1.18}$$

となる．$t_1=0$ なら自明故 $t_1>0$ の場合のみが非自明である．Ψ の凸性により $\Psi(t)/t$ $(t>t_0)$ は正で非減少だから

$$\begin{cases} t_1\geqq t_2 \text{ なら } & \dfrac{\Psi(t_2)}{t_2}\leqq\dfrac{\Psi(t_1)}{t_1} \\ t_1\leqq t_2 \text{ なら } & \dfrac{\Psi(t_2)}{t_2}\leqq\dfrac{\Psi(t_2)}{t_1} \end{cases}\quad(t_1>0,\ t_2>t_0)$$

である．それ故 t_1, t_2 の大小にかかわらず

$$\frac{\Psi(t_2)}{t_2}\leqq\frac{\Psi(t_1)}{t_1}+\frac{\Psi(t_2)}{t_1}$$

となる．この両辺に $t_1/\Psi(t_2)$ を乗ずると (6.1.18) が出る．

さて (6.1.17) の両辺に 1 を加え，そこへ (6.1.18) を適用するのであるが，必要なら N を十分大きいのものに取り換えておいたとして $\log a_N>t_0$ として良いから

$$\frac{\log^+|f(w)|}{\log a_n^{\nu+1}}\leqq 1+\frac{\Psi(\log^+|f(w)|)}{\Psi(\log a_n^{\nu+1})}\leqq 1+\frac{C}{\alpha}\quad(w\in C(\sigma a_n),\ n\geqq N)$$

となる．これより

$$\log|f(w)|\leqq\log^+|f(w)|\leqq\left(1+\frac{C}{\alpha}\right)\log a_n^{1+\nu}=\log a_n^{(1+\nu)(1+\frac{C}{\alpha})}$$

だから結局

$$|f(w)|\leqq a_n^{(1+\nu)(1+\frac{C}{\alpha})}\quad(w\in C(\sigma a_n),\ n\geqq N)$$

が出る．そこで任意の $n\geqq N$ に対し，$r=\sigma a_n$ とおいて，整函数 $f(z)$ の整級数展開の係数 c_k $(k\in\mathbb{Z}^+)$ については

$$|c_k|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C(r)}\frac{f(z)}{z^{k+1}}dz\right|\leqq\sigma^{-k}a_n^{(1+\nu)(1+\frac{C}{\alpha})-k}$$

となっている．故に

$$k>(1+\nu)\left(1+\frac{C}{\alpha}\right)\geqq\left[(1+\nu)\left(1+\frac{C}{\alpha}\right)\right]:=\kappa\in\mathbb{N}$$

([ ] は Gauss 記号) ならば，即ち，$k>\kappa$ のとき

$$|c_k|\leqq\sigma^{-k}a_n^{-(k-\kappa)}\to 0\quad(n\to\infty)$$

だから $c_k = 0$ $(k > \kappa)$ となり

$$f(z) = \sum_{0 \leqq j \leqq \kappa} c_j z^j,\ 即ち,\quad \deg f \leqq \kappa$$

が結論された. こうして (6.1.12) が示された.

第 2 段: 前段で示した (6.1.12) の κ は実は $\nu \in \mathbb{Z}^+$ であることを言う: つまり

(6.1.19)
$$H^\Psi(\mathbb{C}\backslash E) \subset \{f \in A(\mathbb{C}) : \deg f \leqq \nu\}$$

を示す. 背理法によるため或る $\lambda > \nu \geqq 0$, $\lambda \in \mathbb{N}$ があって, 或る多項式

$$f(z) = \sum_{0 \leqq j \leqq \lambda} c_j z^j \quad (c_\lambda \neq 0)$$

が $H^\Psi(\mathbb{C}\backslash E)$ に入るとして矛盾を導く. 十分大きく $1 < a < \infty$ をとると, $\nu + 1 \leqq \lambda$ であるから

$$|f(z)| \geqq \frac{|c_\lambda|}{2}|z|^\lambda \geqq \frac{|c_\lambda|}{2}|z|^{\nu+1} \quad (|z| > a)$$

となる. Ψ は Δ_2 条件を持つから $f \in H^\Psi(\mathbb{C}\backslash E)$ により $g := \frac{2}{c_\lambda} f \in H^\Psi(\mathbb{C}\backslash E)$ となり $\Psi((\nu+1)t)/\Phi(t) \geqq \alpha$ $(t \geqq \beta)$ と $\log a_n \geqq \beta$ $(n \geqq N)$ で定めて居た所の N を, 必要なら更に大きく取り直して, $a_n \geqq a$ $(n \geqq N)$ も満たされるとする. ならば

$$g \in H^\Psi(\mathbb{C}\backslash E), \quad |z^{\nu+1}| \leqq |g(z)| \quad (z \in \bigcup_{n \geqq N} E_n)$$

となるから

$$\begin{aligned}
+\infty &> \int_E \Psi(\log^+|g(z)|)dm(z) = \sum_{0 \leqq n < \infty} \int_{E_n} \Psi(\log^+|g(z)|)dm(z) \\
&\geqq \sum_{n \geqq N} \int_{E_n} \Psi(\log^+|g(z)|)dm(z) \geqq \sum_{n \geqq N} \int_{E_n} \Psi(\log^+|z^{\nu+1}|)dm(z) \\
&= \sum_{n \geqq N} \int_{E_n} \Psi((\nu+1)\log|z|)dm(z) \geqq \sum_{n \geqq N} \Psi((\nu+1)\log a_n)m(E_n) \\
&\geqq \sum_{n \geqq N} \Psi((\nu+1)\log a_n)\frac{d}{\Phi(\log a_n)} = d\sum_{n \geqq N} \frac{\Psi((\nu+1)\log a_n)}{\Phi(\log a_n)} \geqq d\sum_{n \geqq N} \alpha = +\infty
\end{aligned}$$

と言う矛盾が出た. この矛盾は, $\lambda \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{Z}^+$ に対し $\lambda > \nu$ としたからで, 従って $f \in H^\Psi(\mathbb{C}\backslash E)$ は高々 ν 次多項式でなければならない, 即ち, (6.1.19) が正しいことが示された.

第 3 段: 最後は (6.1.19) の逆の包含, 即ち,

(6.1.20)
$$H^\Psi(\mathbb{C}\backslash E) \supset \{f \in A(\mathbb{C}) : \deg f \leqq \nu\}$$

を示す. そうすると (6.1.19) と (6.1.20) から所求の結論が $(6.1.5)_1$ が導かれたことになる. そこで任意の高々 ν 次多項式

$$f(z) = \sum_{0 \leqq j \leqq \nu} c_j z^j \quad (c_0, \cdots, c_\nu \in \mathbb{C})$$

をとって $f \in H^\Psi(\mathbb{C}\backslash E)$ を示す. $\theta := (\nu+1)\max\{|c_0|, \cdots, |c_\nu|\} + 1$ とおけば

$$|f(z)| \leqq \theta|z^\nu| \quad (|z| \geqq 1)$$

であるから

$$\begin{aligned}
\log^+|f(z)| &\leqq \log^+\theta + \log^+|z^\nu| + \log 2 = \log 2 + \log\theta + \log|z|^\nu \\
&= \log(2\theta) + \nu\log|z| \quad (|z| \geqq 1)
\end{aligned}$$

となり, Ψ が Δ_2 条件を満たすから, 或る定数 $B>0$ があって

$$\Psi(\log^+|f(z)|) \leqq B\Psi(\nu\log|z|) \quad (|z| \geqq 1)$$

となる. (6.1.20) が正しければ, 無論 $z^\nu \in H^\Psi(\mathbb{C}\backslash E)$ となり, 逆に上記不等式により, $z^\nu \in H^\Psi(\mathbb{C}\backslash E)$ を仮定すれば $f \in H^\Psi(\mathbb{C}\backslash E)$ が導かれる. それ故 (6.1.20) は次の主張

(6.1.20)$'$
$$z^\nu \in H^\Psi(\mathbb{C}\backslash E)$$

と同値になる. それ故 (6.1.20) の證明が目的であるが, 代りに上の (6.1.20)$'$ を示すことに目的を変える. さて $z \in E$ ならば $|z| \geqq 1$ だから $\log^+|z^\nu| = \nu\log|z|$ なので

$$\begin{aligned}\int_E \Psi(\log^+|z^\nu|)dm(z) &= \int_E \Psi(\nu\log|z|)dm(z)\\ &= \sum_{0\leqq n<\infty}\int_{E_n}\Psi(\nu\log|z|)dm(z)\\ &= \int_{E_0}\Psi(\nu\log|z|)dm(z) + \sum_{1\leqq n<\infty}\int_{E_n}\Psi(\nu\log|z|)dm(z)\end{aligned}$$

である. $z \in E_n$ $(n \in \mathbb{N})$ ならば $a_n \leqq |z| \leqq \delta a_n$ だから (6.1.6) により

$$\Psi(\nu\log|z|) \leqq \Psi(\nu\log(\delta a_n)) \leqq \frac{1}{2^n}\Phi(\log\frac{a_n}{n}) \leqq \frac{1}{2^n}\Phi(\log a_n)$$

であり, 更に (6.1.9) と (6.1.10) によれば $\Phi(\log a_n)m(E_n) \leqq 1$ であったから

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqq n<\infty}\int_{E_n}\Psi(\nu\log|z|)dm(z) &\leqq \sum_{1\leqq n<\infty}\Psi(\nu\log(\delta a_n))m(E_n)\\ &\leqq \sum_{1\leqq n<\infty}\Psi(\nu\log(\delta a_n))\cdot\frac{1}{\Phi(\log a_n)} \leqq \sum_{1\leqq n<\infty}\frac{1}{2^n} = 1\end{aligned}$$

となり, 結局, 結論として

(6.1.21)
$$\int_E \Psi(\log^+|z^\nu|)dm(z) < \infty$$

が示される.

上記 (6.1.21) と, E が無限遠点に吸い込まれて行く環状集合 (5 節の小節 5.3 参照) であることから, $\Psi(\log^+|z^\nu|)$ が $\mathbb{C}\backslash E$ 上優調和優函数, 従って, 調和優函数を持つこと, 故にそれと同値である (6.1.20)$'$ が結論される. 事実, 例えば, 穴開き単位円板 $\{0<|z|<1\}$ に含まれる閉円板 $\Delta = E_{-1}$ を固定する. $\{|z|<a_n\}\backslash\cup_{-1\leqq j<n}E_j$ $(n \in \mathbb{N})$ の測定点 $z=0$ の調和測度を m_n とする. 複素球面 $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ に於いて, Δ に較べて, ∞ 中心, 半径 $1/a_n$ の小円板 $\{|z| \geqq a_n\}\cup\{\infty\}$ が, 相対的に十分小となる様, 十分大きな $N \in \mathbb{N}$ をとって $n \geqq N$ となるすべての n に対してみると

(6.1.22)
$$m_n(\partial\Delta) + \sum_{0\leqq j<n} m_n(E_j) \geqq \sum_{0\leqq j<n} m(E_j)$$

となる. $\{|z|=a_n\} =: C_n$ として

(6.1.23)
$$m_n(\partial\Delta) + \sum_{0\leqq j<n} m_n(E_j) + m_n(C_n) = 1$$

である. 又 $\hat{E} := E\cup\{\infty\}$ とすると, リーマン面 $\hat{\mathbb{C}}$ で考えて, 領域 $\hat{\mathbb{C}}\backslash\hat{E}$ の境界 $\partial(\hat{\mathbb{C}}\backslash\hat{E}) = \hat{E}$ であり, $\hat{\mathbb{C}}\backslash\hat{E}$ の測定点 $z=0$ の調和測度を $\hat{m}$ とすると, これは完閉集合 $\hat{E}$ 上のボレル測度であるが, $\hat{m}(\{\infty\}) = 0$ であり, $\hat{m}|E = m$ である. 更に $\hat{\mathbb{C}}\backslash\hat{E} = \mathbb{C}\backslash E$ であるので $\hat{m}(\hat{E}) = 1$ より $m(E) = 1$ である, 即ち

(6.1.24)
$$\sum_{0\leqq j<n} m(E_j) + \sum_{n\leqq j<\infty} m(E_j) = 1$$

となる. (6.1.23) と (6.1.24) より

$$\sum_{n \leqq j < \infty} m(E_j) - m_n(C_n) = \left(m_n(\partial\Delta) + \sum_{0 \leqq j < n} m_n(E_j) \right) - \sum_{0 \leqq j < n} m(E_j)$$

である. (6.1.22) より上等式の右辺は負でない実数故

(6.1.25)
$$m_n(C_n) \leqq \sum_{n \leqq j < \infty} m(E_j)$$

となる. そこで簡単のため

$$\psi(z) = \Psi(\log^+ |z^\nu|) \quad (z \in \mathbb{C})$$

とおけば, ψ は $\mathbb{C}$ 上非負連続劣調和函数で $\psi|\Delta = 0$ である. 更に

$$S_n := \{|z| < a_n\} \setminus \cup_{0 \leqq j < n} E_j$$

と記せばその境界 ∂S_n は $\cup_{0 \leqq j < n} E_j$ と $C_n = \partial\{|z| < a_n\} = \{|z| = a_n\}$ から成る. u_n を領域 $S_n \setminus \Delta$ 上の境界値 $u_n|\partial S_n = \psi$, $u_n|\partial\Delta = 0$ に対する調和 Dirichlet 問題 PWB (Perron-Wiener-Brelot) 解とする. $u_n|\Delta = 0$ により u_n を S_n 全体に拡張しておく. すると u_n は S_n 上連続劣調和で $S_n \setminus \Delta$ 上正値調和で

$$0 \leqq \psi(z) \leqq u_n(z) \quad (z \in S_n)$$

である. その上各 $k \in \mathbb{N}$ をとるごとに, すべての $k \leqq n \in \mathbb{N}$ について

$$0 \leqq \psi(z) \leqq u_k(z) \leqq u_n(z) \leqq u_{n+1}(z) \quad (z \in S_k)$$

となる. 特に

$$u_n(0) = \int_{(\cup_{0 \leqq j < n} E_j) \cup C_n} \psi(z) dm_n(z) = \sum_{0 \leqq j < n} \int_{E_j} \psi(z) dm_n(z) + \int_{C_n} \psi(z) dm_n(z)$$

に於いて, E_j 上 $\psi(z) \leqq \psi(\delta a_j)$ で $m_n(E_j) \leqq m(E_j)$ だから

$$\begin{aligned} \int_{E_j} \psi(z) dm_n(z) &\leqq \psi(\delta a_j) m_n(E_j) \leqq \psi(\delta a_j) m(E_j) \\ = \Psi(\nu \log(\delta a_j)) m(E_j) &\leqq \Psi(\nu \log(\delta a_j)) \cdot \frac{1}{\Phi(\log a_j)} \leqq \frac{1}{2^j} \end{aligned}$$

であるので

$$\sum_{0 \leqq j < n} \int_{E_j} \psi(z)\, dm_n(z) \leqq \int_{E_0} \psi(z) dm_n(z) + \sum_{1 \leqq j < n} \frac{1}{2^j} \leqq (\sup_{E_0} \psi) \cdot m(E_0) + \sum_{1 \leqq j < n} \frac{1}{2^j}$$

となる. 又 (6.1.25) より

$$\begin{aligned} \int_{C_n} \psi(z)\, dm_n(z) = \psi(a_n) m_n(C_n) &\leqq \sum_{n \leqq j < \infty} \Psi(\nu \log a_n) m(E_j) \\ &\leqq \sum_{n \leqq j < \infty} \Psi(\nu \log(\delta a_j)) \cdot \frac{1}{\Phi(\log a_j)} \leqq \sum_{n \leqq j < \infty} \frac{1}{2^j} \end{aligned}$$

だから, 結局,

$$\begin{aligned} u_n(0) &= \sum_{0 \leqq j < n} \int_{E_j} \psi(z) dm_n(z) + \int_{C_n} \psi(z) dm_n(z) \\ &\leqq (\sup_{E_0} \psi) \cdot m(E_0) + \sum_{1 \leqq j < n} \frac{1}{2^j} + \sum_{n \leqq j < \infty} \frac{1}{2^j} = (\sup_{E_0} \psi) \cdot m(E_0) + \sum_{1 \leqq j < \infty} \frac{1}{2^j} \\ &= 1 + (\sup_{E_0} \psi) \cdot m(E_0) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

となり, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{C}\backslash E$ 上一様収束して

$$u := \lim_{n\to\infty} u_n$$

は $\mathbb{C}\backslash E$ 上連続, $(\mathbb{C}\backslash E)\backslash\Delta$ 上調和, かつ $u|\Delta = 0$ であり, 更に

$$\Psi(\nu\log^+|z|) \leqq u(z) \quad (z \in \mathbb{C}\backslash E)$$

となる. そこで v を領域 $\mathbb{C}\backslash E$ 上の有界連続函数で, 領域 $(\mathbb{C}\backslash E)\backslash\Delta$ 上の境界値 $v|\partial\Delta = 1$, $v|E = 0$ に対する調和 Dirichlet 問題の PWB 解になっているものとする, 但し, $v|\Delta = 1$ により v は $\mathbb{C}\backslash E$ 上まで拡張しておく. Γ を $\{0 < |z| < 1\}$ 内の円周で内部に Δ を含み, かつ Γ は $\partial\Delta$ と同心で, 更に, $\sup_\Gamma u =: \alpha < 1$ となる様に Γ の半径を Δ のそれに十分近くなる様にする. 又 $\sup_\Gamma v =: \beta\ (>0)$ とする. 正実数 t を $t > \alpha/(1-\beta)$ となる様に任意に一つ選び固定して

$$w := u + tv$$

とおく. w は $\mathbb{C}\backslash E$ 上連続で, $(\mathbb{C}\backslash E)\backslash\Delta$ 上調和である. $w|\Delta = t$ で, Γ の内部を ∇ とするとき, $t > \alpha/(1-\beta)$ だから

$$\sup_\Gamma w \leqq \sup_\Gamma u + t\cdot\sup_\Gamma v = \alpha + t\beta < t$$

となり, $w|(\nabla\backslash\Delta) < t$ だから, w は $\partial\Delta$ の各点で優平均値原理を満たすので, 結局 w は $\mathbb{C}\backslash E$ 上優調和で, $u \leqq w$ により

$$\Psi(\log^+|z^\nu|) = \Psi(\nu\log^+|z|) \leqq w(z) \quad (z \in \mathbb{C}\backslash E)$$

となり, $\Psi(\log^+|z^\nu|)$ は $\mathbb{C}\backslash E$ 上優調和優函数を持つから, $z^\nu \in H^\Psi(\mathbb{C}\backslash E)$, 即ち, (6.1.20)' が成り立ち, (6.1.20) が導かれる.

最後に (6.1.5) の第 2 式, 即ち,

$$H^\Phi(\mathbb{C}\backslash E) = \mathbb{C} \tag{6.1.5$_2$}$$

の證明が残った. Ψ として $\Psi := \Phi$ を考えると, これは $(\Phi, 0)$ 条件を満たすので, $(6.1.5)_1$ より $H^\Phi(\mathbb{C}\backslash E) = H^\Psi(\mathbb{C}\backslash E) = \{f \in A(\mathbb{C}) :\ \deg f \leqq 0\} = \{f \in A(\mathbb{C}) :\ \deg f = 0\} = \mathbb{C}$ である. □

6.2. 定理 1.4.2 の證明. 任意に指数 $0 < p < \infty$ と非負整数 $\nu \in \mathbb{Z}^+$ を与えると

$$H^p(\mathbb{C}\backslash E) = \{f \in A(\mathbb{C}) :\ \deg f \leqq \nu\} \tag{1.4.3}$$

となる様な $E \in \mathcal{E}_p$ が存在することを主張するのが, 本論文の主要定理 1.4.2 の内容である. これが定理 6.1.4 より導かれることを示す. そのために $\mathbb{R}^+$ 上の二つの凸函数 Ψ と Φ を

$$\begin{cases} \Psi(t) := e^{pt} - 1 \\ \Phi(t) := e^{qt} - 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}^+) \tag{6.2.1}$$

で与える. ここで p は (1.4.3) のために与えられた指数 $0 < p < \infty$ であり, $0 < q < \infty$ は p と同じく (1.4.3) のために与えられた非負整数 ν により次の如く規定された指数である:

$$\begin{cases} q = p & (\nu = 0), \\ \nu p < q \leqq (\nu+1)p & (\nu > 0). \end{cases} \tag{6.2.2}$$

$\mathbb{R}^+$ 上の函数として, 単に $0 < p,\ q < \infty$ の制約のみで, (6.2.1) の 2 函数 Ψ, Φ は共に $\mathbb{R}^+$ 上の許容凸函数で, 強凸条件と Δ_2 条件を満たすことは容易に確かめられる.

$$\begin{cases} \displaystyle\limsup_{t\to\infty} \frac{\Psi(\nu t)}{\Phi(t-s)} = e^{qs}\limsup_{t\to\infty} e^{(\nu p - q)t} = 0 & \Longleftrightarrow \quad \nu p - q < 0 \\ \displaystyle\liminf_{t\to\infty} \frac{\Psi((\nu+1)t)}{\Phi(t)} = \limsup_{t\to\infty} e^{((\nu+1)p-q)t} > 0 & \Longleftrightarrow \quad (\nu+1)p - q \geqq 0 \end{cases}$$

であるから, (6.1.2) と (6.1.3) が成立する条件は $\nu p < q \leqq (\nu+1)p$ である. (6.1.1) は $p \leqq q$ と同値である. 以上により (6.2.2) は Ψ が (Φ, ν) 条件を満たすことを意味し, 定理 6.1.4 によれば, $(6.1.5)_1$: $H^{\Psi}(\mathbb{C}\backslash E) = \{f \in A(\mathbb{C}) : \deg f \leqq \nu\}$, がわかる. (6.2.1) の Ψ の場合では $H^{\Psi}(\mathbb{C}\backslash E) = H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ なので, 上と合せて (1.4.3) が導かれる. □

6.3. 定理 1.1.4 の證明. 多項式の全体 $\{f \in A(\mathbb{C}) : \deg f < \infty\}$ は整函数空間 $A(\mathbb{C})$ の線形部分空間であるが, 整函数の Hardy 空間として実現することは出来ないけれど, 或る整函数の Hardy 空間の中へ埋蔵できると言うのが, 標題の定理の内容である. だから定理 1.4.4 は二つの部分からなる. 任意の指数 $0 < p < \infty$ が与えられているとき

(6.3.1)
$$\{f \in A(\mathbb{C}) : \deg f < \infty\} \subset H^p(\mathbb{C}\backslash E)$$

となる $E \in \mathcal{E}_p$ の存在を主張するのが前半部分である. この様な $E \in \mathcal{E}_p$ はいっぱいあるかも知れないけれどそのどれも

(6.3.2)
$$\{f \in A(\mathbb{C}) : \deg f < \infty\} \subsetneq H^p(\mathbb{C}\backslash E)$$

であることを主張するのが後半部分である. 実際はこれよりも更に強く, すべての $E \in \mathcal{E}_p$ に対して

(6.3.3)
$$\{f \in A(\mathbb{C}) : \deg f < \infty\} \neq H^p(\mathbb{C}\backslash E)$$

となることを言っている. そこで (6.3.1) となる $E \in \mathcal{E}_p$ の存在證明は後回しにして, 先ず (6.3.3) を示すことから始める. 背理法で示すために, 仮に

(6.3.4)
$$\{f \in A(\mathbb{C}) : \deg f < \infty\} = H^p(\mathbb{C}\backslash E)$$

となる $E \in \mathcal{E}_p$ があったとする. (6.3.4) を左辺で見ると, $\dim\{f \in A(\mathbb{C}) : \deg f < \infty\} = \infty$ なので, これを右辺で見て $\dim H^p(\mathbb{C}\backslash E) = \infty$ である. ならば, 命題 1.3.3 によれば $H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ は超越整函数を含まねばならぬ. これを再び左辺で読めば, 多項式 (即ち, 非超越整函数) の全体であるべき筈の $\{f \in A(\mathbb{C}) : \deg f < \infty\}$ が超越整函数を含まねばならぬと言う矛盾を認めねばならぬことになり (6.3.4) の不成立, 即ち, (6.3.3) が結論される.

残る所の, そして定理 1.4.4 の本質的部分である (6.3.1) を成り立たせる $E \in \mathcal{E}_p$ の存在を證明したい. 与えられた円環内の非極の $\mathcal{N}_p$ 集合 (H^p 零集合) の存在定理である基本定理 I(定理 5.2.1) を以下繰り返し使う. 先ず $E_0 \subset \{1/4 < |z| < 1/2\}$ となる非極 $\mathcal{N}_p$ 集合 E_0 を任意に選んで固定する. 計測点 $z = 0$ で測る E_0 に関する完閉集合 $K \subset \{|z| > 1/2\}$ の調和容量を $c(K)$ と記す (3 節参照). 即ち, $\mathbb{C}\backslash(E_0 \cup K)$ の計測点 $z = 0$ の調和測度の K での値を $c(K)$ と記し, K の調和容量と呼ぶのである.

最初 $K_1 \subset \{1/2 < |z| < 1\}$ である非極かつ $\mathcal{N}_p$ 集合である完閉集合 K_1 をとる. K_1 は非極だから $c(K_1) > 0$ なので調和容量の中間値定理 (定理 3.3.1) により $0 < c(E_1) < e^{-1}$ となる K_1 の完閉部分集合 E_1 を選ぶことが出来る:

(6.3.5)
$$E_1 \subset \{1/2 < |z| < 1\}, \quad E_1 \in \mathcal{N}_p, \quad 0 < c(E_1) < e^{-1}.$$

次いで $K_2 \subset \{1 < |z| < 2\}$ である非極かつ $\mathcal{N}_p$ 集合である完閉集合 K_2 をとり上と同様にして

(6.3.6)
$$E_2 \subset \{1 < |z| < 2\}, \quad E_2 \in \mathcal{N}_p, \quad 0 < c(E_2) < e^{-2}$$

となる K_2 の完閉部分集合 E_2 を選ぶ. これを繰り返して, 完閉集合列 $(E_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ で

(6.3.7)
$$E_n \subset \{n-1 < |z| < n\}, \quad E_n \in \mathcal{N}_p, \quad 0 < c(E_n) < e^{-n} \quad (n \in \mathbb{N},\, n \geqq 2)$$

を満たすものを作る. そして

(6.3.8)
$$E := \bigcup_{0 \leqq n < \infty} E_n$$

とするとき, この $E \in \mathcal{E}_p$ が, (6.3.1) を成り立たせる求めるものであることを示したい.

$\mathbb{C}$ の基本座標函数を I とする, 即ち, $I(z) = z$ $(z \in \mathbb{C})$ とする. だから各 $k \in \mathbb{Z}^+ = \{0\} \cup \mathbb{N}$ に対して $I^k(z) = z^k$ $(z \in \mathbb{C})$ である. すると $|I^k|^p$ $(k \in \mathbb{Z}^+,\, 0 < p < \infty)$ は $\mathbb{C}$ 上の劣調和函数で, $|I^k|^p(\infty) = \infty$ として $|I^k|^p$ は $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の広義 (即ち, $[-\infty, \infty]$ 値) 連続函数である. 明らかに (6.3.1) は

$(6.3.1)'$
$$I^k \in H^p(\mathbb{C}\backslash E) \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$$

と同値であるので, (6.3.1) を示すのに (6.3.1)' を示せば良いわけである.
$\mathbb{C}\backslash E$ の計測点 $z=0$ の調和測度を m とする. この意味をはっきりさせておく. 問題は $\mathbb{C}\backslash E$ は $\mathbb{C}$ 内の領域であるが相対完閉ではなく相対境界 $\partial(\mathbb{C}\backslash E)=E$ は $\mathbb{C}$ 内完閉でない. それなのに E 上の Borel 測度である m が何故 E 上の単位測度であるかである. そこでリーマン面 $\hat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上で考えるため $\hat{E}=E\cup\{\infty\}$, 即ち, E の $\hat{\mathbb{C}}$ 内での閉包, を考えると

$$\mathbb{C}\backslash E=\hat{\mathbb{C}}\backslash\hat{E}$$

で $\mathbb{C}\backslash E$ を $\hat{\mathbb{C}}$ で考えたら. $\mathbb{C}\backslash E$ は $\hat{\mathbb{C}}$ 内の相対完閉領域で, $\hat{\mathbb{C}}$ 内の領域 $\mathbb{C}\backslash E$ の境界 $\hat{\partial}(\mathbb{C}\backslash E)=\hat{E}=E\cup\{\infty\}$ は完閉である. 故に $\mathbb{C}\backslash E$ の $\hat{\mathbb{C}}$ での計測点 $z=0$ の調和測度 $\hat{m}$ を考えたら, $\hat{m}$ は調和測度の定義より $\hat{E}$ 上の確率測度である. $\hat{E}$ のどの 1 点でも測度は常に 0 だから $\hat{m}(\{\infty\})=0$ である. そこで $\mathbb{C}\backslash E$ の $\mathbb{C}$ での計測点 $z=0$ の調和測度 m は, 自然な意味で

$$m=\hat{m}|E$$

と定めるのだから, m は E 上の単位 Borel 測度となるのである.
I^k の $\mathbb{C}\backslash E$ 上の Hardy p ノルム $||I^k||_p$ は, $\mathbb{C}\backslash E$ 上の劣調和函数 $|I^k|^p$ の最小調和優函数 (+∞ も許して) を $\widehat{|I^k|^p}$ と記すことにすると

$$||I^k||_p:=\left(\widehat{|I^k|^p}(0)\right)^{1/p}=\left(\int_E|I^k(z)|^p dm(z)\right)^{1/p} \tag{6.3.9}$$

である. つまり, 最初の等式は p ノルムの定義そのもので, 最後の等式は

$$P:=\int_E|I^k(z)|^p dm(z)=\sum_{0\leqq n<\infty}\int_{E_n}|I^k(z)|^p dm(z)<+\infty \tag{6.3.10}$$

であるときに成立する. 詳しくは, 条件 $P<+\infty$ 及び E が ∞ に吸い込まれる環状型集合[8] であるときに (6.3.9) の最後の等式が成立する (小節 6.1 の第 3 段の (6.1.20)' の證明参照). (6.3.1)' は $||I^k||_p<\infty$ $(k\in\mathbb{Z}^+)$ と同値なので, 結局 (6.3.10) を示せば定理 1.4.4 の證明が完了する.
よって, 以下, (6.3.10): $P<\infty$ を示す.

$$l:=[kp]+1\in\mathbb{N}\quad(\text{[ ] は Gauss 記号})$$

とおき

$$Q:=\sum_{0\leqq n\leqq l}\int_{E_n}|I^k(z)|^p dm(z)<+\infty$$

に注意する. さて

$$P=Q+\sum_{l<n<\infty}\int_{E_n}|I^k(z)|^p dm(z)=Q+\sum_{l<n<\infty}\int_{E_n}|z|^{kp}dm(z)$$

であるが, $n>l\in\mathbb{N}$ より $n\geqq 2$ なので, $z\in E_n$ $(n>l)$ ならば $E_n\subset\{n-1<|z|<n\}$ 故 $|z|>1$ となり $|z|^{kp}\leqq|z|^l\leqq n^l$ であり, また $m(E_n)\leqq c(E_n)\leqq e^{-n}$ だから

$$\int_{E_n}|z|^{kp}dm(z)\leqq n^l m(E_n)\leqq n^l e^{-n}\leqq\int_{n-1}^n t^l e^{-t}dt$$

である (下図 11 参照).

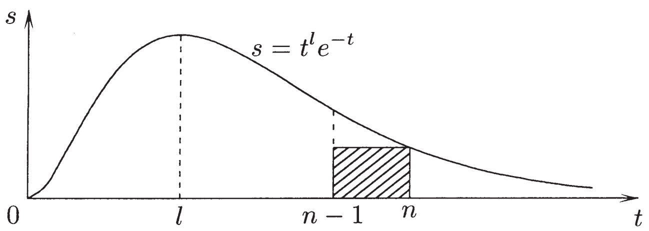

図 11

8) $E\in\mathcal{E}_p$ に対し発散増大数列 $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ があって, 非極 $\mathcal{N}_p$ 集合である E_n 達への E の成分分解 $E=\cup_{n\in\mathbb{N}}E_n$ の各成分 E_n が $E_n\subset\{r_n<|z|<r_{n+1}\}$ $(n\in\mathbb{N})$ となるとき, E を無限遠点 ∞ に吸い込まれて行く $\boldsymbol{H^p}$ **環状型集合**と言うことにする (5 節の小節 5.3 で導入した概念, 環状集合の一般化).

だから

$$\sum_{l<n<\infty}\int_{E_n}|z|^{kp}dm(z)\leqq\sum_{l<n<\infty}\int_{n-1}^{n}t^le^{-t}dt=\int_l^\infty t^le^{-t}dt\leqq\int_0^\infty t^le^{-t}dt=l!$$

となる．以上総合して $P\leqq Q+l!<+\infty$, 即ち, (6.3.10) が確かめられた． □

7. 有限位数整函数の Hardy-Orlicz 空間

複素線形空間としての整函数空間 $A(\mathbb{C})$ の線形部分空間 X が Hardy 空間として実現可能，即ちある $E\in\mathcal{E}_p$ を見付けて $X=H^p(\mathbb{C}\backslash E)$, であるか否かで X 達を実現可能又は実現不能の二範疇に分類する問題を論ずるのが本論文の主題である．整函数の超越性又は非超越性の視点から $A(\mathbb{C})$ の線形部分空間の内

$$\mathcal{P}_\alpha:=\{f\in A(\mathbb{C}):\deg f<\alpha\}\quad(0<\alpha\leqq\infty)$$

の形のものを考えて

(A) $\mathcal{P}_\alpha$ $(0<\alpha<\infty)$ は実現可能

と言う結果を本論文の主定理として前節でその證明を与えた．この結果の限界を示すものとして

(B) $\mathcal{P}_\infty$ は実現不能ながら $\mathcal{P}_\infty$ を含む $A(\mathbb{C})$ の実現可能部分空間は存在する

も前節で證明した．本節では次数 deg に替えて，位数 ord について，即ち整函数の位数の有限性又は無限性の視点から，上記の (A) と (B) に対応する所がどうなるかを考える．上の $\mathcal{P}_\alpha$ にならって

$$\mathcal{Q}_\alpha:=\{f\in A(\mathbb{C}):\operatorname{ord}f<\alpha\}\quad(0<\alpha\leqq\infty)$$

と置くとき，文字どおりの (A) の対応命題は "$\mathcal{Q}_\alpha$ $(0<\alpha<\infty)$ は実現可能" であるが，これの正しくないことは命題 1.6.1 より直ぐわかる．もしかしたら "$\cap_{\beta>\alpha}\mathcal{Q}_\beta$ は実現可能" が求めるものかも知れぬが，我々には実態が全く見えない．この (A) の対応物に関連して，全く不満足ながら，我々が現時点で得ている所をまとめたものが，定理 1.6.10 であるが，それを含む様に一般化された Hardy-Orlicz 版に定式化された所を述べその證明を与える．この形で定理 1.6.10 を導く．(B) の対応命題は "$\mathcal{Q}_\infty$ は実現不能ながら $\mathcal{Q}_\infty$ を含む $A(\mathbb{C})$ の実現可能部分空間は存在する" であるが，これはそのまま正しい．それが定理 1.6.12 であるが，これも定理 1.6.10 の場合と同様に Hardy-Orlicz 版を経由して證明が完結される．

7.1. 位数と演算． $A(\mathbb{C})$ の元の間の代数算法と $A(\mathbb{C})$ の各元の位数との関係は当然大切となる．$A(\mathbb{C})$ を複素線形空間とみてその線形部分空間を位数条件で定めたもの達の実現可能性がテーマなので当面次のことを注意する．f, f_1, f_2 は $A(\mathbb{C})$ の元で $c\in\mathbb{C}$ とするとき

(7.1.1)
$$\begin{cases}\operatorname{ord}(f_1+f_2)\leqq\max\{\operatorname{ord}f_1,\operatorname{ord}f_2\},\\ \operatorname{ord}(f_1+f_2)=\max\{\operatorname{ord}f_1,\operatorname{ord}f_2\}\quad(\text{但し}\operatorname{ord}f_1\neq\operatorname{ord}f_2\text{ のとき});\end{cases}$$

(7.1.2)
$$\begin{cases}\operatorname{ord}(cf)\leqq\operatorname{ord}f,\\ \operatorname{ord}(cf)=\operatorname{ord}f\quad(\text{但し }c\neq0\text{ のとき})\end{cases}$$

となる．(7.1.1) の第 1 の不等式と (7.1.2) の両式は完全に自明であるが，(7.1.1) の第 2 等式のみ小考を要する．実際 $\rho_j:=\operatorname{ord}f_j$ $(j=1,2)$ で $0\leqq\rho_1<\rho_2<\infty$ とするとき，任意の $0<\varepsilon<(\rho_2-\rho_1)/2$ に対しある増加発散正数列 $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がとれて，n が十分大なるかぎり

$$M(r_n;f_2)>e^{r_n^{\rho_2-\varepsilon}},\quad M(r_n;f_1)<e^{r_n^{\rho_1+\varepsilon}}$$

と出来る．ならば，十分大きな n に対し

$$M(r_n;f_1+f_2)\geqq e^{r_n^{\rho_2-\varepsilon}}-e^{r_n^{\rho_1+\varepsilon}}=e^{r_n^{\rho_2-\varepsilon}}\left(1-e^{r_n^{\rho_1+\varepsilon}-r_n^{\rho_2-\varepsilon}}\right)>\frac{1}{2}e^{r_n^{\rho_2-\varepsilon}}$$

となり，$\mathrm{ord}(f_1+f_2) \geqq \rho_2$ がわかる．(7.1.1) 第1式よりとにかく $\mathrm{ord}(f_1+f_2) \leqq \max\{\rho_1, \rho_2\} = \rho_2$ だから，$\mathrm{ord}(f_1+f_2) = \rho_2$ が出る．$\rho_2 = \infty$ の場合も上の證明の自明な修正で同じ結論に到る ((7.1.1) の第2式の證明終わり)．

だから，$0 \leqq \rho \leqq \infty$ に対し $\{f \in A(\mathbb{C}) : \mathrm{ord}\, f < \rho\}$ や $\{f \in A(\mathbb{C}) : \mathrm{ord}\, f \leqq \rho\}$ は $A(\mathbb{C})$ の線形部分空間である．例えば，$0 \leqq \rho < \infty$ のとき，$\{f \in A(\mathbb{C}) : \mathrm{ord}\, f \leqq \rho\}$ が実現可能ならそれは誠に満足な状況であるが，今の所その真偽は全くわからないながら，その方向に資することを期待して次の結果を述べる．

定理 7.1.3. $\boldsymbol{\Psi}$ **は強凸であり又** $\boldsymbol{\Delta_2}$ **条件を満たす** $\mathbb{R}^+$ **上の許容凸函数とし，その上** $\boldsymbol{\Psi}$ **のみで決まる正定数** $\boldsymbol{C_\Psi}$ **があって，すべての** $\boldsymbol{0 < \beta < \alpha < \infty}$ **に対し**

(7.1.4)
$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\Psi(t^\beta)}{\Psi(t^\alpha)} t^\alpha \leqq C_\Psi$$

を満足するものとする．そのとき，任意に与えた $\boldsymbol{0 < \alpha < \infty}$ **に対し**

(7.1.5)
$$\{f \in A(\mathbb{C}) : \overline{\mathrm{ord}} f < \alpha\} \subset H^\Psi(\mathbb{C}\backslash E) \subset \{f \in A(\mathbb{C}) : \underline{\mathrm{ord}} f \leqq \alpha\}$$

となるような $\boldsymbol{E \in \mathcal{E}_\Psi}$ **が存在する．**

$\overline{\mathrm{ord}} = \mathrm{ord}$ なので，(7.1.1) と (7.1.2) より (7.1.5) の最左辺は $A(\mathbb{C})$ の線形部分空間である．(7.1.5) の最右辺も又同様であることが $\underline{\mathrm{ord}} f \geqq \alpha$ なら双対的に全く同様に出るが，$\underline{\mathrm{ord}} f \leqq \alpha$ だからそうではないながら，似た考えで示すことが出来る．但し，これら2集合の線形演算で閉じていることは現文脈に限って言えば重要でない．

證明： 定理 6.1.4 の證明と形式は極めて類似する．基本定数 $1 < \delta < \rho < \infty$ と $0 < d < 1$ 及び基本正数列 $(b_j)_{j\in\mathbb{Z}^+}$ を $b_0 = 1$ と $b_n \geqq \max\{\delta, n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ を満たす様に任意に固定する．これらに基づいて環状集合の基本存在定理，特にその内の基本定理 II (定理 5.3.7)，を適用して正数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ 及び環状集合の流量と呼ぶ正数列 $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と非極 $\mathcal{N}_\Psi$ 集合列 $(E_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ を下記の如くに定める：

(7.1.6)
$$a_n \geqq b_n, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geqq \rho \quad (n \in \mathbb{Z}^+),$$

(7.1.7)
$$E_n \subset \{a_n \leqq |z| \leqq \delta a_n\} \quad (n \in \mathbb{Z}^+),$$

(7.1.8)
$$V_n = \Psi(a_n^\alpha) \quad (n \in \mathbb{N})^{9)}.$$

更に領域 $\mathbb{C}\backslash \cup_{n\in\mathbb{Z}^+} E_n$ の計測点 $z = 0$ の調和測度を m とするとき

(7.1.9)
$$d \leqq V_n m(E_n) \leqq 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

を満たすことも要求する．このとき

(7.1.10)
$$E := \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} E_n$$

が求める ∞ に流入する局所 H^Ψ 零集合 (即ち，$\mathcal{E}_\Psi$ 集合) の流量 $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の環状集合で，$E \in \mathcal{E}_\Psi$ の各成分 E_n は見てのとおり非極 $\mathcal{N}_\Psi$ 集合である．この E に対して (7.1.5) の包含関係を以下に於いて示すが，これを第1の包含を示す第1段と，第2の包含を示す第2段の二段階に分けて行う．

第1段． 最初に (7.1.5) の左側の包含を示す：任意の $f \in A(\mathbb{C})$ について $\mathrm{ord}\, f = \overline{\mathrm{ord}} f < \alpha$ ならば $f \in H^\Psi(\mathbb{C}\backslash E)$ となることを言う．$M(r) = M(r; f)$ として

$$\overline{\mathrm{ord}} f = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r)}{\log r} = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M(\delta r)}{\log r} < \alpha$$

なので，$\overline{\mathrm{ord}} f < \beta < \alpha$ となる任意の正数 β を固定するとき，ある正数 $r(\beta) > 1$ をとれば，すべての $r \geqq r(\beta)$ に対し

$$\frac{\log\log M(\delta r)}{\log r} \leqq \beta,$$

又は同じことであるが

$$\log M(\delta r) \leqq r^\beta \quad (r \geqq r(\beta))$$

となる．数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ については $a_n \nearrow \infty$ $(n \nearrow \infty)$ なので番号 $N_1 \in \mathbb{N}$ が定まって $n \geqq N_1$ ならば $a_n \geqq r(\beta)$ となる．

9) Ψ は強凸だから $\lim_{n\to\infty} V_n^{-1} \log a_n = 0$ を満たすことは明白で $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は確かに流量と呼ばれるべき要件を満たす．

だから

$$\log M(\delta a_n) \leqq a_n^{\beta} \quad (n \geqq N_1) \tag{7.1.11}$$

である．条件 (7.1.4) より $0<\beta<\alpha<\infty$ の 2 数で決まるある正数 $t(\Psi)>1$ が定まり $t \geqq t(\Psi)$ ならば

$$\frac{\Psi(t^{\beta})}{\Psi(t^{\alpha})} t^{\alpha} \leqq 2C_{\Psi}$$

となる．よってある番号 $N_2 \in \mathbb{N}$ が定まって $n \geqq N_2$ ならば $a_n \geqq t(\Psi)$ となり

$$\frac{\Psi(a_n^{\beta})}{\Psi(a_n^{\alpha})} \leqq 2C_{\Psi} a_n^{-\alpha} \quad (n \geqq N_2)$$

となる．(7.1.6) から $a_n \geqq a_0\rho^n$ より $a_n^{-\alpha} \leqq a_0^{-\alpha}(\rho^{-\alpha})^n$ だから，$B := 2C_{\Psi}a_0^{-\alpha}$ と置くならば上の陳列の不等式より

$$\frac{\Psi(a_n^{\beta})}{\Psi(a_n^{\alpha})} \leqq B(\rho^{-\alpha})^n \quad (n \geqq N_2) \tag{7.1.12}$$

となる．そこで $N_3 := \max\{N_1, N_2\}$ とすれば，(7.1.11) と (7.1.12) により単なるくり返しではあるが，

$$\log M(\delta a_n) \leqq a_n^{\beta}, \quad \frac{\Psi(a_n^{\beta})}{\Psi(a_n^{\alpha})} \leqq B(\rho^{-\alpha})^n \quad (n \geqq N_3) \tag{7.1.13}$$

となる．さて $f = f|(\mathbb{C}\backslash E) \in H^{\Psi}(\mathbb{C}\backslash E)$ を言う為には，$\Psi(\log^+|f|)$ が $\mathbb{C}\backslash E$ 上有限な最小調和優函数 u を持つことを言えばよい．$E \in \mathcal{E}_{\Psi}$ が ∞ に吸い込まれる環状集合であるときには，もし

$$u(0) := \int_E \Psi(\log^+|f(z)|)\, dm(z) < \infty$$

ならば $u := H^{\mathbb{C}\backslash E}_{\Psi(\log^+|f|)}$ が求める最小調和優函数 u となることが結論出来る (小節 6.1 の第 3 段の $(6.1.20)'$ の證明参照)．さて

$$u(0) = \int_E \Psi(\log^+|f(z)|)\, dm(z) = \left(\sum_{0\leqq n<N_3} + \sum_{N_3\leqq n}\right)\int_{E_n} \Psi(\log^+|f(z)|)\, dm(z)$$

に於いて，最右辺の第 1 項の和

$$\sum_{0\leqq n<N_3}\int_{E_n} \Psi(\log^+|f(z)|)\, dm(z) \leqq \Psi\big(a_{N_3}^{\beta}\big) m\Big(\bigcup_{0\leqq n<N_3} E_n\Big) \leqq \Psi\big(a_{N_3}^{\beta}\big) < +\infty$$

なのだから $u(0) < +\infty$ を結論する為には

$$I := \sum_{N_3\leqq n}\int_{E_n} \Psi(\log^+|f(z)|)\, dm(z)$$

が有限なことを言えばよい．$E_n \subset \{a_n \leqq |z| \leqq \delta a_n\}$ $(n \geqq N_3)$ だから，(7.1.13) より，E_n 上では

$$\Psi(\log^+|f(z)|) \leqq \Psi(\log^+ M(\delta a_n)) \leqq \Psi\big(a_n^{\beta}\big) \quad (n \geqq N_3)$$

であり，又，$d \leqq V_n m(E_n) \leqq 1$ かつ $V_n = \Psi\big(a_n^{\alpha}\big)$ だから，とにかく

$$m(E_n) \leqq \frac{1}{\Psi\big(a_n^{\alpha}\big)} \quad (n \geqq N_3)$$

である．それ故

$$I = \sum_{N_3\leqq n}\int_{E_n} \Psi(\log^+|f(z)|)\, dm(z) \leqq \sum_{N_3\leqq n}\frac{\Psi(a_n^{\beta})}{\Psi(a_n^{\alpha})} \leqq B\sum_{N_3\leqq n}(\rho^{-\alpha})^n = B\frac{(\rho^{-\alpha})^{N_3}}{1-\rho^{-\alpha}} < +\infty$$

となって，$f \in H^{\Psi}(\mathbb{C}\backslash E)$ の證明が終わる．

第2段：今度は (7.1.5) の右側の包含を示す：即ち，任意の $f \in H^{\Psi}(\mathbb{C}\backslash E)$ を取るとき $\underline{\mathrm{ord}}f \leqq \alpha$ となることを示す (本当は $\overline{\mathrm{ord}}f \leqq \alpha$ が示されたら，非常に幸福なのであるが，それからすると $\underline{\mathrm{ord}}f \leqq \alpha$ は大変な後退でまことに悲しいが現時点では仕方がない)．任意に固定する $n \in \mathbb{N}$ に対し a_n を見る．$1 < \delta < \rho < \infty$ だから $\{\frac{\delta}{\rho}a_n < |z| < a_n\}$ は $\mathbb{C}\backslash E$ に含まれる．事実，(7.1.6) より，$a_{n-1} \leqq \frac{1}{\rho}a_n$ だから $\delta a_{n-1} \leqq \frac{\delta}{\rho}a_n$ であることによる．そこで $\sigma := \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{1/4}$ と置けば $0 < \sigma < 1$ であり，上述したことは $\{\sigma^4 a_n < |z| < a_n\} \subset \mathbb{C}\backslash E$ である．よって特に円環

$$\{\sigma^2 a_n < |z| < a_n\} \subset \mathbb{C}\backslash E$$

で，その中心二分円 $C(\sigma a_n) := \{|z| = \sigma a_n\}$ である．$\{\sigma^2 a_n < |z| < a_n\}$ の計測点 $w \in C(\sigma a_n)$ の調和測度を ξ_w とすると

$$\frac{d\xi_w}{ds}(z) \leqq \begin{cases} \dfrac{A_1}{4\pi a_n} & (z \in C(a_n)) \\ \dfrac{A_1}{4\pi\sigma^2 a_n} & (z \in C(\sigma^2 a_n)) \end{cases} \tag{7.1.14}$$

であった ((4.3.4) 参照)．ここで ds は $\partial\{\sigma^2 a_n < |z| < a_n\} = C(a_n) \cup C(\sigma^2 a_n)$ 上の線素で $A_1 = A_1(\sigma^{-2})$ は modulus σ^{-2} である円環 $\{\sigma^2 a_n < |z| < a_n\}$ の二分円 $C(\sigma a_n) = \{|z| = \sigma a_n\}$ の最小 Harnack 定数である (§4 参照)．さて任意の $f \in H^{\Psi}(\mathbb{C}\backslash E)$ を取って固定しているから $\Psi(\log^+|f|)$ は $\mathbb{C}\backslash E$ 上有限な調和優函数を持つので，それも一つ，u と記すものを，固定する．$\underline{\mathrm{ord}}f \leqq \alpha$ を言いたいのだから，$f \not\equiv 0$ で $u \not\equiv 0$ と仮定してよい．f は $\mathbb{C}$ へ $f \in A(\mathbb{C})$ となるように拡張されているのだから $\{\sigma^2 a_n \leqq |z| \leqq a_n\}$ 上有界正則故 $\log^+|f|$ は有界劣調和となり，それ故任意の $w \in C(\sigma a_n)$ に対し

$$\log^+|f(w)| \leqq \left(\int_{C(a_n)} + \int_{C(\sigma^2 a_n)}\right) \log^+|f(\zeta)|\, d\xi_w(\zeta) \tag{7.1.15}$$

となる．両辺の Ψ をとり Jensen の不等式を使って

$$\Psi(\log^+|f(w)|) \leqq \left(\int_{C(a_n)} + \int_{C(\sigma^2 a_n)}\right) \Psi(\log^+|f(\zeta)|)\, d\xi_w(\zeta) \tag{7.1.16}$$

が出る．上式の右辺の第1の積分を I_1，第2の積分を I_2 と置き，それらを個別に評価する．$\{\sigma^2 a_n < |z| < a_n\}$ も $\{\sigma^4 a_n < |z| < \sigma^2 a_n\}$ も $\mathbb{C}\backslash E$ に含まれる．それで領域 $\{|z| < a_n\}\backslash E$ の計測点 $z = 0$ の調和測度を η_1，領域 $\{|z| < \sigma^2 a_n\}\backslash E$ の計測点 $z = 0$ の調和測度を η_2 として

$$\begin{cases} \dfrac{ds}{d\eta_1}(z) \leqq A\dfrac{2\pi a_n}{\eta_1(C(a_n))} & (z \in C(a_n)), \\ \dfrac{ds}{d\eta_2}(z) \leqq A\dfrac{2\pi\sigma^2 a_n}{\eta_2(C(\sigma^2 a_n))} & (z \in C(\sigma^2 a_n)) \end{cases} \tag{7.1.17}$$

が成り立った ((4.4.3) 参照)，但し，$A = A(\sigma^{-2}) := 2A_1^2 = 2(A_1(\sigma^{-2}))^2$ である (4.4 節参照)．これと先ほどの (7.1.14)，及び，$\Psi(\log^+|f(z)|) \leqq u(z)$ $(z \in \mathbb{C}\backslash E)$ によれば

$$\begin{aligned} I_1 = \int_{C(a_n)} \Psi(\log^+|f(\zeta)|)\, d\xi_w(\zeta) &= \int_{C(a_n)} \Psi(\log^+|f(\zeta)|) \frac{d\xi_w}{ds}(\zeta)\frac{ds}{d\eta_1}(\zeta) d\eta_1(\zeta) \\ &\leqq \int_{C(a_n)} u(\zeta) \cdot \frac{A_1}{4\pi a_n} \cdot A\frac{2\pi a_n}{\eta_1(C(a_n))}\, d\eta_1(\zeta) \\ &= \frac{AA_1}{2\eta_1(C(a_n))} \int_{C(a_n)} u(\zeta) d\eta_1(\zeta) \leqq \frac{AA_1}{2\eta_1(C(a_n))} u(0) \end{aligned}$$

となる．全く同様にして

$$I_2 = \int_{C(\sigma^2 a_n)} \Psi(\log^+|f(\zeta)|)\, d\xi_w(\zeta) \leqq \frac{AA_1}{2\eta_2(C(\sigma^2 a_n))} u(0)$$

が得られる．$\eta_1(C(a_n)) < \eta_2(C(\sigma^2 a_n))$ だから，$w \in C(\sigma a_n)$ に対して

$$\begin{aligned} &\Psi(\log^+|f(w)|) \leqq I_1 + I_2 \\ &\leqq \frac{1}{2}AA_1 u(0) \left(\frac{1}{\eta_1(C(a_n))} + \frac{1}{\eta_2(C(\sigma^2 a_n))}\right) \leqq \frac{AA_1 u(0)}{\eta_1(C(a_n))} \end{aligned}$$

である．更に (7.1.7), (7.1.8), (7.1.9) と $\eta_1(C(a_n)) \geqq m(E_n)$ により

$$\eta_1(C(a_n)) \geqq m(E_n) \geqq \frac{d}{\Psi(a_n^\alpha)}$$

だから，定数 C を

$$C := \frac{A(\sigma^{-2})A_1(\sigma^{-2})u(0)}{d}$$

で与えると

$$\Psi(\log^+|f(w)|) \leqq C\Psi(a_n^\alpha) \quad (w \in C(\sigma a_n))$$

となる．

$$\Psi(\log^+ M(\sigma a_n)) := \max_{w\in C(\sigma a_n)} \Psi(\log^+|f(w)|) \leqq C\Psi(a_n^\alpha)$$

だから，しかも $M(\sigma a_n) \geqq 1$ としてよいのだから

$$\frac{\Psi(\log M(\sigma a_n))}{\Psi(a_n^\alpha)} \leqq C$$

となる．不等式 (6.1.18) によれば

$$\frac{\log M(\sigma a_n)}{a_n^\alpha} \leqq 1 + \frac{\Psi(\log M(\sigma a_n))}{\Psi(a_n^\alpha)} \leqq 1 + C$$

だから，$\log M(\sigma a_n) \leqq (1+C)a_n^\alpha$ より

$$\log\log M(\sigma a_n) \leqq \log(1+C) + \alpha\log a_n = \log\frac{1+C}{\sigma^\alpha} + \alpha\log(\sigma a_n)$$

となり，従って

$$\frac{\log\log M(\sigma a_n)}{\log(\sigma a_n)} \leqq \alpha + \frac{\log\frac{1+C}{\sigma^\alpha}}{\log(\sigma a_n)}$$

が得られる．上の不等式の両辺の $n \to \infty$ としたときの下極限を考えると

$$\underline{\mathrm{ord}} f := \liminf_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r)}{\log r} \leqq \liminf_{n\to\infty} \frac{\log\log M(\sigma a_n)}{\log(\sigma a_n)} \leqq \alpha$$

即ち，$\underline{\mathrm{ord}} f \leqq \alpha$ が示される． □

7.2. 定理 1.6.10 の証明． 任意の指数 $0 < p < \infty$ を与える．同じく任意の正数 $0 < \alpha < \infty$ を取るとき，これらに対してある $E \in \mathcal{E}_p$ で

(1.6.11) $$\{f \in A(\mathbb{C}) : \overline{\mathrm{ord}} f < \alpha\} \subset H^p(\mathbb{C}\backslash E) \subset \{f \in A(\mathbb{C}) : \underline{\mathrm{ord}} f \leqq \alpha\}$$

となるものが見つかると言うのが定理 1.6.10 の内容である．

(7.2.1) $$\Psi(t) := e^{pt} - 1 \quad (t \in \mathbb{R}^+)$$

で与える Ψ は強凸かつ Δ_2 条件を満たす $\mathbb{R}^+$ 上の許容凸関数で，任意の正数 C_Ψ を固定すると，これが条件 (7.1.4) を満足することは容易に見てとれる．さて $H^\Psi = H^p$ で，従って $\mathcal{E}_\Psi = \mathcal{E}_p$ でもあるので，定理 7.1.3 をこの (7.2.1) の Ψ に適用して読めば，実は，定理 1.6.10 そのものになり，式 (7.1.5) は式 (1.6.11) となる．これで定理 1.6.10 が証明されたことになる．

7.3. 位数有限整函数全体空間． 本小節標題で言うところの空間

$$\{f \in A(\mathbb{C}) : \mathrm{ord}\, f < \infty\}$$

は $A(\mathbb{C})$ の線形部分空間である．そして，すべての $0<p<\infty$ に対して，整函数の Hardy 空間 $H^p(\mathbb{C}\backslash E)$ $(E\in\mathcal{E}_p)$ として実現不能であるが，しかし，各 $0<p<\infty$ に対し

(1.6.13) $$\{f\in A(\mathbb{C}):\operatorname{ord} f<\infty\}\subset H^p(\mathbb{C}\backslash E)$$

となる $E\in\mathcal{E}_p$ が求まると言うのが定理 1.6.12 の内容である．実現不能部分は系 1.6.8 の主張するところでそのもとになっている命題 1.6.1 は證明済みなので，(1.6.13) の證明のみが残っている．この部分を Hardy-Orlicz 版で再掲する：

定理 7.3.1. $\boldsymbol{\Psi}$ **は強凸で** $\boldsymbol{\Delta_2}$ **条件を満たす** $\mathbb{R}^+$ **上の許容凸函数とし，その上** $\boldsymbol{\Psi}$ **のみで決まる正数** $\boldsymbol{C_\Psi}$ **が定まって，すべての** $\boldsymbol{0<\alpha<\infty}$ **に対し**

(7.3.2) $$\limsup_{t\to\infty}\frac{\Psi(t^\alpha)}{\Psi(e^t)}e^t\leqq C_\Psi$$

を満足するものとする．そのとき

(7.3.3) $$\{f\in A(\mathbb{C}):\operatorname{ord} f<\infty\}\subset H^\Psi(\mathbb{C}\backslash E)$$

となる $\boldsymbol{E\in\mathcal{E}_\Psi}$ **が存在する．**

證明： 以下の證明と定理 7.1.3 のそれは形式的には非常に類似する．特にその第 1 段の證明と今から述べる證明は全く並行的である．先ず基本定数 $1<\delta<\rho<\infty$ と $0<d<1$ 及び基本正数列 $(b_j)_{j\in\mathbb{Z}^+}$ を $b_0=1$ と $b_n\geqq\max\{\delta,n\}$ $(n\in\mathbb{N})$ を満たす様に任意に固定する．これらに基づいて環状集合の基本存在定理，特にその内の基本定理 II(定理 5.3.7)，を適用して正数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ と環状集合の流量と呼ぶ正数列 $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と非極 $\mathcal{N}_\Psi$ 集合列 $(E_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ を下記の如くに定める：

(7.3.4) $$a_n\geqq b_n,\quad \frac{a_{n+1}}{a_n}\geqq\rho\quad(n\in\mathbb{Z}^+),$$

(7.3.5) $$E_n\subset\{a_n\leqq|z|\leqq\delta a_n\}\quad(n\in\mathbb{Z}^+),$$

((7.3.6) $$V_n=\Psi\left(e^{a_n}\right)\quad(n\in\mathbb{N})^{10)}.$$

更に領域 $\mathbb{C}\backslash\cup_{n\in\mathbb{Z}^+}E_n$ の計測点 $z=0$ の調和測度を m とするとき

(7.3.7) $$d\leqq V_n m(E_n)\leqq 1\quad(n\in\mathbb{N})$$

を満たすことも要求する．このとき

(7.3.8) $$E:=\cup_{n\in\mathbb{Z}^+}E_n$$

が求める無限遠点 ∞ に流入する局所 H^Ψ 零集合 (即ち，$\mathcal{E}_\Psi$ 集合) の流量 $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の環状集合で，$E\in\mathcal{E}_\Psi$ の各成分 E_n は非極 N_Ψ 集合である．この E に対して (7.3.3) の包含関係式が成り立つことを示す．

任意の $f\in A(\mathbb{C})$ で $\operatorname{ord} f<\infty$ となるものを取ると，$f\in H^\Psi(\mathbb{C}\backslash E)$ となることを言えばよい．$M(r;f)=M(r)$ として

$$\operatorname{ord} f=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log\log M(r)}{\log r}=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log\log M(\delta r)}{\log r}<\infty$$

に注意する．なので $\operatorname{ord} f<\beta<\infty$ となる正数 $0<\beta<\infty$ を一つ固定できる．するとある正数 $r(\beta)>1$ をとれば，すべての $r\geqq r(\beta)$ に対して

$$\frac{\log\log M(\delta r)}{\log r}\leqq\beta,$$

又は同じことであるが

$$\log M(\delta r)\leqq r^\beta\quad(r\geqq r(\beta))$$

となる．数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ については $a_n\nearrow\infty$ $(n\nearrow\infty)$ なので番号 $N_1\in\mathbb{N}$ が定まって $n\geqq N_1$ ならば $a_n\geqq r(\beta)$ となる．だから

10) かく定めた $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は確かに流量と呼ばるべき要件をみたいしている．

$$\log M(\delta a_n) \leqq a_n^\beta \quad (n \geqq N_1) \tag{7.3.9}$$

である．条件 (7.3.2) より $0<\beta<\infty$ で決まるある正数 $t(\Psi)>1$ が定まり，$t \geqq t(\Psi)$ なら

$$\frac{\Psi(t^\beta)}{\Psi(e^t)}e^t \leqq 2C_\Psi$$

となる．よってある番号 $N_2 \in \mathbb{N}$ が定まって $n \geqq N_2$ ならば $a_n \geqq t(\Psi)$ となり

$$\frac{\Psi(a_n^\beta)}{\Psi(e^{a_n})} \leqq 2C_\Psi e^{-a_n} \quad (n \geqq N_2)$$

となる．(7.3.4) から $a_n \geqq a_0\rho^n$ より $e^{-a_n} \leqq e^{-a_0\rho^n} \leqq a_0^{-1}\rho^{-n}$ だから，$B := 2C_\Psi a_0^{-1}$ と置くならば，上の陳列の不等式より

$$\frac{\Psi(a_n^\beta)}{\Psi(e^{a_n})} \leqq B\rho^{-n} \quad (n \geqq N_2) \tag{7.3.10}$$

となる．そこで $N_3 := \max\{N_1, N_2\}$ とすれば，(7.3.9) と (7.3.10) より単なるくり返しであるが

$$\log M(\delta a_n) \leqq a_n^\beta, \quad \frac{\Psi(a_n^\beta)}{\Psi(e^{a_n})} \leqq B\rho^{-n} \quad (n \geqq N_3) \tag{7.3.11}$$

となる．さて $f = f|(\mathbb{C}\backslash E) \in H^\Psi(\mathbb{C}\backslash E)$ を言う為には，$\Psi(\log^+|f(z)|)$ が $\mathbb{C}\backslash E$ 上有限な最小調和優函数 u を持つことを言えばよい．$E \in \mathcal{E}_\Psi$ が ∞ に吸い込まれる環状集合であるときには，もし

$$u(0) := \int_E \Psi(\log^+|f(z)|)\,dm(z) < \infty$$

ならば $u := H^{\mathbb{C}\backslash E}_{\Psi(\log^+|f|)}$ が求める最小調和優函数 u となることが結論出来る (小節 6.1 の第 3 段の $(6.1.20)'$ の證明参照)．さて

$$u(0) = \int_E \Psi(\log^+|f(z)|)\,dm(z) = \left(\sum_{0\leqq n<N_3} + \sum_{N_3\leqq n}\right)\int_E \Psi(\log^+|f(z)|)\,dm(z)$$

に於いて，上式の最右辺の第 1 項の和

$$\sum_{0\leqq n<N_3}\int_{E_n} \Psi(\log^+|f(z)|)\,dm(z) \leqq \Psi(a_{N_3}^\beta)m\Bigl(\bigcup_{0\leqq n<N_3} E_n\Bigr) \leqq \Psi(a_{N_3}^\beta) < +\infty$$

なのだから，$u(0) < +\infty$ を結論する為には

$$I := \sum_{N_3\leqq n}\int_{E_n} \Psi(\log^+|f(z)|)\,dm(z)$$

が有限なことを言えばよい．$E_n \subset \{a_n \leqq |z| \leqq \delta a_n\}$ $(n \geqq N_3)$ だから，(7.3.11) より，既に直ぐ上でも使ったように E_n 上では

$$\Psi(\log^+|f(z)|) \leqq \Psi(\log^+ M(\delta a_n)) \leqq \Psi(a_n^\beta) \quad (n \geqq N_3)$$

であり，又，$d \leqq V_n m(E_n) \leqq 1$ かつ $V_n = \Psi(e^{a_n})$ だから，とにかく $m(E_n) \leqq 1/\Psi(e^{a_n})$ $(n \geqq N_3)$ 故

$$\begin{aligned} I &= \sum_{N_3\leqq n}\int_{E_n} \Psi(\log^+|f(z)|)\,dm(z) \leqq \sum_{N_3\leqq n}\frac{\Psi(a_n^\beta)}{\Psi(e^{a_n})} \\ &\leqq B\sum_{N_3\leqq n}\rho^{-n} = \frac{B}{\rho^{N_3}}\cdot\frac{\rho}{\rho-1} < +\infty \end{aligned}$$

となって，$f \in H^\Psi(\mathbb{C}\backslash E)$ の證明が完結する． □

7.4. 定理 1.6.12 の證明. 包含関係 (1.6.13) を示すことのみが残っている．定理 7.3.1 からこれを導けばよい．小節 7.2 に於けるが如く，再び

$$\Psi(t) = e^{pt} - 1 \quad (t \in \mathbb{R}^+) \tag{7.4.1}$$

を考える．この Ψ は強凸で Δ_2 条件を満たす $\mathbb{R}^+$ 上の許容凸函数で，C_Ψ として任意の正数を与えるとき条件 (7.3.2) を満足することは容易に確かめられる．すると $H^\Psi = H^p$ であり，従って $\mathcal{E}_\Psi = \mathcal{E}_p$ でもある．定理 7.3.1 を (7.4.1) の Ψ で読めば，これは定理 1.6.2 そのもので，(7.3.3) が (1.6.13) となり，その成立が示されたことになる． □

参 照 文 献

[1] C. Constantinescu und A. Cornea: *Ideale Ränder Riemannscher Flächen,* Springer, 1963.

[2] M. Hasumi: *Hardy classes on plane domains,* Technical Report 2, Institute Mittag-Leffler, Djursholm, Sweden, 1977.

[3] M. Hasumi: *Hardy classes on plane domains,* Ark. Mat., **16**(1978), 213–227.

[4] M. Hasumi: *Hardy Classes on Riemann Surfaces — A Modern Introduction —,* Uchida Rokakuho Publishing Co., Ltd., 2010 (in Japanese).

[5] J. Heinonen, I. Kilpeläinen and O. Martio: *Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations,* Clarendon Press, 1993.

[6] M. Heins: *Hardy Classes on Riemann Surfaces,* Lecture Notes in Math., Vol. **98**, Springer, 1969.

[7] D. A. Hejhal: *Classification theory for Hardy classes of analytic functions,* Bull. Amer. Math. Soc., **77**(1971), 769–771.

[8] D. A. Hejhal: *Classification theory for Hardy classes of analytic functions,* Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **566**(1973), 1–28.

[9] G. Jank und L. Volkmann: *Einführung in die Theorie der Ganzen und Meromorphen Funktionen mit Anwendungen auf Differentialgleichungen,* Birkhäuser Verlag, 1985.

[10] S. Kobayashi: *On H^p classification of plane domains,* Kodai Math. Sem. Rep., **27**(1976), 458–463.

[11] S. Kobayashi: *On a classification of plane domains for Hardy classes,* Proc. Amer. Math. Soc., **68**(1978), 79–82.

[12] M. Nakai: *On Evans potential,* Proc. Japan Acad., **38**(1962), 624–629.

[13] M. Nakai and J. Narita: *The isomorphism theorem of Lebesgue spaces,* Bull. Daido Univ., **48**(2012), 1–30 (in Japanese).

[14] M. Nakai and J. Narita: *Types and cotypes of contracted Banach spaces,* Bull. Daido Univ., **49**(2013), 1–38 (in Japanese).

[15] M. Nakai and J. Narita: *A rift of topological linear structures of Hardy spaces — From the standpoint of application of interpolation problems —,* Bull. Daido Univ., **50**(2014), 1–30 (in Japanese).

[16] M. Parreau: *Sur les moyennes des fonctions harmoniques et analytiques et classifications des surfaces de Riemann,* Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **3**(1951), (1952), 103–197.

[17] L. Sario and M. Nakai: *Classification Theory of Riemann Surfaces,* Die Grundlehrer der mathematischen Wissenschaften in Einzelldarstellungen, Band **164**, Springer-Verlag, 1970.

[18] S. M. Shah: *On the lower order of integral functions,* Bull. Amer. Math. Soc., **52**(1946), 1046–1052.

[19] M. Tsuji: *Potential Theory in Modern Function Theory,* Maruzen, 1959.

[20] A. Zygmund: *Trigonometric Series,* Cambridge Univ. Press, 1959.